Гимназия 1543, 10-В класс, 25 сентября.

Длина кривой.

Кривые. Параметризации кривых.

Функцию $f(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ будем называть *кривой.* Точки $f(a)$ и $f(b)$ называются, соответственно, началом и концом кривой. Аргумент функции f называется *параметром кривой.*

Вообще говоря, заданные разными функциями кривые могут быть одинаковыми в том смысле, что начало и конец их совпадают, а сами функции с изменением параметра проходят одни и те же значения. Например:

$$\begin{cases} x(t) = \cos t; \\ y(t) = \sin t; \\ \quad t \in [0,2] \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x(t) = \cos 2t; \\ y(t) = \sin 2t; \\ \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

в указанном выше смысле задают одинаковые дуги окружности.

Поэтому будем говорить, что две кривые f и g *эквивалентны* (отличаются параметризацией), если существует строго возрастающая функция $t(s)$ такая, что $f(t(s)) = g(s)$. Саму функцию $t(s)$ будем называть *перепараметризацией* (заменой параметра) кривой.

Длина кривой. Вариация кривой.

Зададимся целью сопоставить некоторым кривым длину — неотрицательное число, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) Если кривая AB разбита точкой X на две части, то длина AB равна сумме длин AX и XB.

2) Если две кривые равны в геометрическом смысле (первая переводится во вторую движением, возможно с последующей перепараметризацией), то равны их длины.

3) Длина отрезка равна расстоянию между его концами.

Довольно естественная конструкция, приводящая к длине кривой — вписанная в кривую ломаная. Такую ломаную можно задать при помощи *разбиения отрезка параметризации.*

Пусть $f(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — кривая. Неубывающую конечную последовательность чисел σ: σ_0, σ_1, $\ldots \sigma_m$, такую что $\sigma_0 = a$, $\sigma_m = b$, будем называть разбиением $[a,b]$. Длину ломаной $f(\sigma_0)f(\sigma_1)\ldots f(\sigma_m)$ будем называть *v-суммой* разбиения σ и обозначать $v(\sigma)$. Максимальное из расстояний между соседними точками разбиения называется *диаметром* разбиения и обозначается $d(\sigma)$.

Вариацией кривой $f(t)$ будем называть точную верхнюю грань множества v-сумм всех разбиений отрезка параметризации $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f(t) = \sup\limits_{\sigma} v(\sigma)$. Если такая грань не существует, говорят, что длина кривой бесконечна.

Нетрудно проверить, что вариация аддитивна ($\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f$, если $c \in [a,b]$), инвариантна при перепараметризациях и движениях и, в случае, если кривая — отрезок, равна расстоянию между его концами. Поэтому вариацию кривой вполне естественно называть длиной этой кривой.

Непрерывные кривые. Равномерная непрерывность непрерывных кривых.

Функция $f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется *непрерывной* в точке a, если для *любой* последовательности аргументов a_n, сходящейся к a, последовательность значений $f(a_n)$ сходится к $f(a)$ (сходимость последовательности a_n к пределу a эквивалентна сходимости последовательности расстояний между a_n и a к нулю, а также покоординатной сходимости). Функция называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна во всех точках этого множества. Непрерывными на области определения являются, например, следующие функции: *const*, x^k, a^x, $\sin x$, $\dfrac{1}{1+x^2}$. Довольно интересный пример разрывной функции: $\sin(1/x)$, доопределённый нулём при $x = 0$ (её разрывность в точке 0 докажите самостоятельно!).

Помимо непрерывности мы будем рассматривать некое более сильное свойство: *равномерную непрерывность.* Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной (на области определения), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что расстояние между значениями функции, удалёнными друг от друга менее, чем на δ, меньше ε. Равномерно непрерывной являются, например, функции x и $\sqrt{x}$. А вот x^2 равномерно непрерывной функций не является. Оказывается, верна следующая теорема:

Теорема о равномерной непрерывности.

Непрерывная функция, определённая на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна.

Докажем утверждение от противного. Предположим, что непрерывная функция f не является равномерно непрерывной. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $\delta > 0$ найдётся пара точек $x(\delta)$ и $y(\delta)$, удалённых менее чем на δ, таких что расстояние между ними не меньше ε. Рассмотрим последовательности $x_n = x(1/n)$ и $y_n = y(1/n)$. Последовательность x_n в силу своей ограниченности имеет сходящуюся подпоследовательность x_{k_n} (причём предел лежит в области определения функции в силу её замкнутости). Заметим, что последовательность y_{k_n} имеет тот же предел. Поэтому этот предел не может являться точкой непрерывности функции f (разница между значениями $f(x_{k_n})$ и $f(y_{k_n})$ не меньше ε). Противоречие с непрерывностью f.

В частности, любая непрерывная кривая равномерно непрерывна, так как её область определения — отрезок — является ограниченным и замкнутым.

Другое определение длины непрерывной кривой.

Рассмотрим последовательность σ_n разбиений отрезка параметризации *непрерывной* кривой f. Оказывается, что если последовательность диаметров $d(\sigma_n)$ стремится к 0, то последовательность v-сумм $v(\sigma_n)$ стремится к вариации кривой. Докажем сперва вспомогательную лемму.

Лемма об аппроксимации непрерывной кривой.

Пусть число A меньше вариации непрерывной кривой f. Тогда существует $\delta(A) > 0$, такое что любая v-сумма разбиения диаметра, меньшего $\delta(A)$, больше A.

Рассмотрим разбиение σ, v-сумма которого больше A (такое разбиение существует по определению вариации). Пусть в нём m точек. Кривая f равномерно непрерывно, поэтому для $\varepsilon = \dfrac{v(\sigma) - A}{4m}$ существет $\delta > 0$ такой, что точки, удалённые друг от друга на отрезке параметризации меньше, чем на δ, удалены друг от друга в пространстве меньше, чем на ε.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение ω с диаметром, меньшим δ. Добавим к нему точки разбиения σ, получив при этом новое разбиение $(\omega + \sigma)$. При добавлении к ω любой точки значение v-суммы разбиения увеличивается не более чем на 2ε (засчёт того отрезка разбиения, который поделён на две части). Мы добавляем меньше m точек. Поэтому:

$$v(\omega + \sigma) \leqslant v(\omega) + \frac{v(\sigma) - A}{2}.$$

С другой стороны, $v(\omega + \sigma) \geqslant v(\sigma)$. Поэтому из предыдущего неравенства следует:

$$\frac{v(\sigma) + A}{2} \leqslant v(\omega).$$

Ну а $v(\sigma) > A$. Утверждение леммы доказано.

Рассмотрим теперь последовательность $v_n = v(\sigma_n)$. Докажем, что любая ε-окрестность вариации f содержит почти все члены v_n. Действительно, окрестность 0 с радиусом $\delta(\mathrm{V}\, f - \varepsilon)$ (в обозначениях леммы) содержит почти все диаметры $v(d_n)$, поэтому, в силу утверждения леммы, рассматриваемая окрестность $\mathrm{V}\, f$ содержит почти все члены v_n.

Доказанное только что утверждение позволяет определить длину непрерывной кривой как предел длин вписанных ломанных при стремлении диаметров разбиений, по которым эти ломанные построены, к 0.

Длина окружности. Непрерывность тригонометрических функций. Первый замечательный предел.

Введём теперь, опираясь на вышеизложенную теорию, длину окружности. Сперва рассмотрим дугу раствором 90°. Она имеет длину, так как длина любой вписанной ломаной не больше суммы длин горизонтальных и вертикальных проекций её отрезков, которая, в свою очередь, не превышает двух радиусов окружности (горизонтальную и вертикальную оси считаем проведёнными из центра окружности к концам дуги). Поэтому и окружность (состоящая из 4 таких дуг) имеет длину. Длина полуокружности единичного радиуса обозначается π. Длина полуокружности радиуса r, как нетрудно показать, равна $r\pi$ (вариация кривой при преобразовании подобия умножается на коэффициент подобия). Из аддитивности градусной меры угла и аддитивности вариации следует, что длина дуги окружности пропорциональна её градусной мере. Поэтому вполне естественно помимо градусной меры использовать радианную (угол определяется длиной дуги единичной окружности, высеченной этим углом). Поясним, чем она удобна.

Рассмотрим последовательность l_n длин вписанных в единичную окружность правильных n-угольников; $l_n = 2n \sin \dfrac{\pi}{n}$. Параметризуем окружность следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = t; \\ y(t) = \sqrt{1 - t^2}; \quad t \in [-1, 1] \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x(t) = 2 - t; \\ y(t) = -\sqrt{1 - (2-t)^2}; \\ \qquad t \in (1, 3] \end{cases}$$

Это непрерывная параметризация. Более того, длина каждого из отрезков разбиения, соответствующего правильному n-угольнику, в этой параметризации не превышает l_n (она равна длине проекции соответствующей стороны многоугольника на ось абсцисс). Поэтому l_n стремится к 2π. А последовательность $\dfrac{n}{\pi} \sin \dfrac{\pi}{n}$ стремится, соответственно, к 1. Вообще говоря, для любой последовательности $x_n \to 0$, не принимающей нулевые значения, $\dfrac{\sin x_n}{x_n} \to 1$. Это утверждение называется *первым замечательным пределом.* Если выбрать в качестве меры угла любую линейную (пропорциональную градусной) меру, отличную от радианной, то этот предел уже не будет равен 1. Докажем первый замечательный предел.

Рассмотрим дугу AB раствора x, меньшего $\pi/2$. Пусть A лежит на оси абсцисс, B — выше оси абсцисс, центр окружности дуги — в начале координат O. Опустим из точки B перпендикуляр BC на ось абсцисс, а из точки A проведём перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с лучом OB в точке D. Опустим из B перпендикуляр BE на AD. Очевидна следующая цепь неравенств: $BC < AB < x < BE + EA < BE + DA$. Заметим, что $BC = \sin x$, $BE = 1 - \cos x$, $DA = \operatorname{tg} x$. Таким образом получаем, что $\sin x < x < (1 - \cos x) + \operatorname{tg} x$. Отсюда, во-первых, $\dfrac{x}{\sin x} > 1$, во-вторых, $\dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$. Во втором неравенстве можно увеличить правую часть, заметив, что $1 - \cos x < 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. Таким образом получаем:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} + \sin x.$$

Заметим, что синус и косинус непрерывны. Непрерывность синуса в точке 0 следует из неравенства $\sin x < x$ при положительном x и $\sin x > x$ при отрицательном x. Непрерывность косинуса в точке 0 следует из того, что функция $\sqrt{1 - x^2}$ непрерывна, а композиция непрерывных функций тоже непрерывна. Докажем теперь непрерывность синуса и косинуса в произвольной точке a.

Действительно, если $a_n \to a$, то $\sin a_n = \sin(a + (a_n - a)) = \sin a \cos(a_n - a) + \cos a \sin(a_n - a)$, что стремится к $\sin a \cdot 1 + \cos a \cdot 0$, что равно $\sin a$. Непрерывность косинуса доказывается аналогично.

В силу непрерывности синуса и косинуса, если последовательность x_n стремится к 0, то $\dfrac{1}{\cos x_n} + \sin x_n$ стремится к 1. Поэтому должно выполняться:

$$1 \leqslant \lim \frac{|x_n|}{\sin |x_n|} \leqslant \lim \frac{1}{\cos |x_n|} + \sin |x_n| = 1.$$

Отсюда, $\lim \dfrac{\sin |x_n|}{|x_n|} = 1$. А в силу чётности функции $\dfrac{\sin x}{x}$ верно, что и $\lim \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$.