11 "А", биологи, подготовка к экзаменам, 16 февраля, задачи на урок. Выберите какие-нибудь задачи и решите их.

С-1) Решите уравнение: $\frac{\sqrt{(x-5)(x+8)}}{\sqrt{(x+5)(x-8)}} = 0$.

С-2) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямой AA' и плоскостью $BC'D$.

С-3) Решите неравенство $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$.

С-4) В трапеции $ABCD$ боковые стороны $AB = 27$, $CD = 28$, основание $BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите AC.

С-5) Найдите все значения параметра a, при котором система

$$\begin{cases} \log_a(x + y - 1) = x - 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

16 февраля, решения.

С-1) Решите уравнение: $\frac{\sqrt{(x-5)(x+8)}}{\sqrt{(x+5)(x-8)}} = 0$.

Решение. Эта дробь может равняться нулю только при $x = 5$ или $x = -8$. Легко проверить, что $x = 5$ не годится, а $x = -8$ подходит. *Ответ:* $x = -8$.

С-2) В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите тангенс угла между прямой AA' и плоскостью $BC'D$.

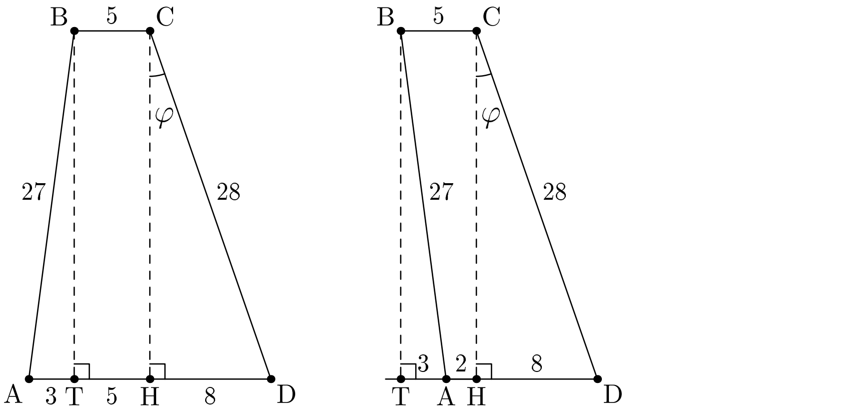
Решение. Так как $AA'||CC'$, достаточно найти тангенс угла между этой плоскостью и прямой CC'. Так как плоскости $AA'C$ и BDC' перпендикулярны, это будет $\operatorname{tg}\angle MC'C$, где M — середина BD. Имеем: $\operatorname{tg}\angle MC'C = \frac{CM}{CC'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

С-3) Решите неравенство $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$.

Решение. Это неравенство (поскольку $0,1 < 1$) равносильно $x^2 + x - 2 < x + 3$ при условии существования логарифмов, то есть $x^2 + x - 2 > 0$. Решение первого неравенства $\left(-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\right)$, второго — $(-\infty\,;-2) \cup (1\,;+\infty)$. В итоге получаем *Ответ:* $\left(-\sqrt{5}\,;-2\right) \cup \left(1\,;\,\sqrt{5}\right)$.

С-4) В трапеции $ABCD$ боковые стороны $AB = 27$, $CD = 28$, основание $BC = 5$. Известно, что $\cos\angle BCD = -\frac{2}{7}$. Найдите AC.

Решение. Пусть CH — высота этой трапеции, $\angle HCD = \varphi$. Ясно, что $\cos\angle BCD = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi = -\frac{2}{7}$, откуда $\sin\varphi = \frac{2}{7}$. Это значит, что $HD = \frac{2}{7}\cdot 28 = 8$ и $CH = \sqrt{28^2 - 8^2} = 12\sqrt{5}$. Пусть далее $BT = 12\sqrt{5}$ — другая высота, очевидно, что $TH = BC = 5$. По теореме Пифагора находим, что $AT = \sqrt{27^2 - (12\sqrt{5})^2} = 3$.



Может представиться два случая расположения точки A — на отрезке TH или на его продолжении. В первом случае $AC = \sqrt{4 + 720} = 2\sqrt{181}$, во втором $AC = \sqrt{64 + 720} = 28$ *Ответ:* $AC = 28$ или $AC = 2\sqrt{181}$.

С-5) Найдите все значения параметра a, при котором система

$$\begin{cases} \log_a(x + y - 1) = x - 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Подставляя второе уравнение в первое, сведём задачу к такой: "При каких a уравнение $\log_a(3-x) = x-3$ имеет один корень?" (ясно, что по каждому x однозначно находится $y = 4-2x$). Заменим $t = 3-x$. Нарисовав график $y = \log_a t$ и прямую $y = -t$, увидим, что при $a > 1$ решение, очевидно, единственно. Если же $0 < a < 1$, то рассмотрение графиков показывает, что единственным будет решение только в том случае, если прямая $y = -t$ касается графика $y = \log_a t$. Выясним, когда это бывает. Если в точке с абсциссой t_0 будет касание, то $\log_a t_0 = -t_0$ и $\frac{1}{t_0 \ln a} = -1$. Из второго равенства $t_0 = -\frac{1}{\ln a}$, подставив в первое, получим, что $a^{\frac{1}{\ln a}} = -\frac{1}{\ln a}$, то есть $e^{\ln a \cdot \frac{1}{\ln a}} = e = -\frac{1}{\ln a}$, отсюда $\ln a = -\frac{1}{e}$ и $a = e^{-\frac{1}{e}}$. *Ответ:* при $a = e^{-\frac{1}{e}}$ и $a > 1$.