11 "А", биологи, подготовка к экзаменам, 2 марта, задачи на урок. Выберите какие-нибудь задачи и решите их.

С-1) Решите уравнение: $\frac{\sin 7y}{\cos 7y+1} = 0$.

С-2) В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и $A'C$.

С-3) Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

С-4) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

С-5) Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_{a^2} y = (x^2+3x+2)^4 \\ y - x^2 = 3x+2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

На дом ничего

2 марта, решения.

С-1) Решите уравнение: $\frac{\sin 7y}{\cos 7y+1} = 0$.

> *Решение.* Чтобы равенство выполнялось, надо, чтобы $\sin 7y = 0$. При этом $\cos 7y = \pm 1$ и подходит только первый вариант. Значит, $7y = 2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$, откуда находим *Ответ:* $y = \frac{2\pi n}{7}$ $(n \in \mathbb{Z})$.

С-2) В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и $A'C$.

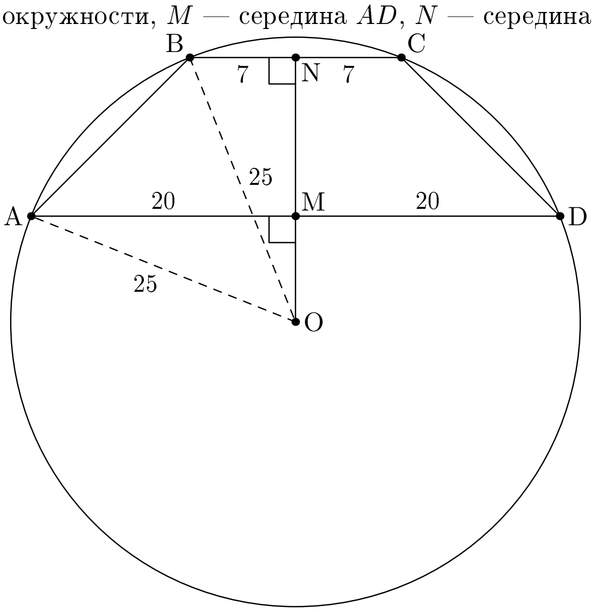
> *Решение.* Очевидно, нас интересует $\cos\angle B'A'C$, так как $AB || A'B'$. Поскольку $A'C = CB' = \sqrt{2}$, найдём $\cos\angle B'A'C = \frac{A'B'}{2A'C} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. *Ответ:* $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

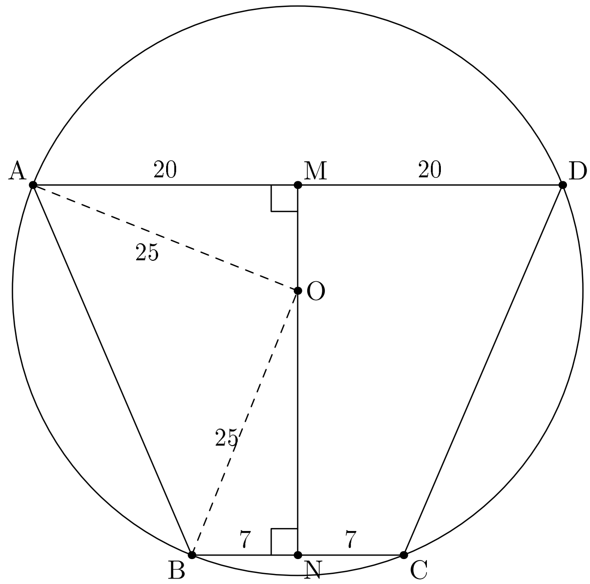
С-3) Решите неравенство: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$.

> *Решение.* Неравенство сводится к $\frac{1}{x^2-1} > 1$ при условии существования логарифма, то есть при $x^2 > 1$. Неравенство далее сводится к $\frac{2-x^2}{x^2-1} > 0$, что в силу $x^2 > 1$ сводится попросту к $2 - x^2 > 0$. В итоге имеем $1 < x^2 < 2$, то есть *Ответ:* $(-\sqrt{2}\,;\,-1) \cup (1\,;\,\sqrt{2})$.

С-4) Трапеция с основаниями 14 и 40 вписана в окружность радиуса 25. Найдите высоту трапеции.

> *Решение.* Как известно, вписанная трапеция равнобедренная. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, $AD = 40$, $BC = 14$ — её основания. Нарисовав в окружности радиуса 25 хорду $AD = 40$, мы понимаем, что параллельная ей хорда $BC = 14$ проходит либо "выше" AD (с противоположной от центра окружности стороны), либо "ниже" (с той же стороны, где центр). Пусть O — центр окружности, M — середина AD, N — середина BC.





> Независимо от расположения хорд можно вычислить по теореме Пифагора в треугольниках MAO и NBO расстояния $OM = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ и $ON = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$. Из чертежей видно, что в первом случае высота равна $24 - 15 = 9$, а во втором $24 + 15 = 39$. *Ответ:* 9 *или* 39.

С-5) Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_{a^2} y = (x^2 + 3x + 2)^4 \\ y - x^2 = 3x + 2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

> *Решение.* Подставляя $y = x^2 + 3x + 2$ в первое уравнение, получим $\log_{a^2} y = y^4$. Понятно, что $y > 0$, а функция $y = x^2 + 3x + 2$ каждое своё положительное значение принимает дважды, поэтому каждому решению y_0 этого уравнения будет соответствовать два значения x, то есть два решения системы, что и требуется. Итак, нужно выяснить, когда уравнение $y^4 = \log_{a^2} y$ имеет ровно один корень. При $|a| < 1$ (и, разумеется, $a \neq 0$), левая часть уравнения — возрастающая, правая — убывающая функция на $(0\,;\,+\infty)$. Из графиков очевидно, что у них ровно одна точка пересечения, то есть одно y. Так что такие a годятся. Теперь рассмотрим случай $|a| > 1$, когда обе функции возрастают. В этом случае нам подойдёт, очевидно, только случай касания графиков.Если это касание произойдёт в некоторой точке y_0, то совпадут производные: $4y_0^3 = \frac{1}{y_0 \ln(a^2)}$ и значения самих функций: $y_0^4 = \frac{\ln y_0}{\ln(a^2)}$. Из этих условий легко получить, что $\ln y_0 = \frac{1}{4}$, а тогда $\ln(a^2) = \frac{1}{4y_0^4} = \frac{1}{4e}$, а тогда $a^2 = e^{\frac{1}{4e}}$ и $a = \pm e^{\frac{1}{8e}}$ *Ответ:* $a \in (-1\,;\,0) \cup (0\,;\,1) \cup \left\{\pm e^{\frac{1}{8e}}\right\}$.