11 "А", биологи, подготовка к экзаменам, 24 марта, домашнее задание.

1) Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен 60°. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

2) В треугольнике ABC угол A равен 45°. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр MN на сторону AC. Площади треугольников MNC и ABC относятся как $1:8$. Найдите углы треугольника ABC.

3) Две окружности радиусов 5 и 2 внешне касаются. Прямая касается меньшей окружности в точке A и пересекает бо́льшую окружность в точках B и C, причём $BC = AB$. Найдите AC.

Решения задания прошлой недели.

1) При каких b система $\begin{cases} |y| - x = b \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ имеет ровно три решения?

<u>Решение:</u> Нетрудно привести графическое решение: нижнее уравнение задаёт окружность с центром в начале координат радиуса $\sqrt{2}$, а верхнее — "птичку" из биссектрис первой и четвёртой координатных четвертей, сдвинутую вдоль оси OX так, что "носик" птички будет в точке $(-b\,;\,0)$. Однако, мы дадим другое решение.

Легко видеть, что если мы нашли решение $(x\,;\,y)$ нашей системы, то $(x\,;\,-y)$ тоже решение. Тем самым, каждому решению найдётся "пара", то есть решений, казалось бы, всегда чётное число. Но нам нужно, чтобы решений было три — как же это возможно? Это будет возможно только если $y = 0$ — в этом случае парное решение будет тем же самым, и пары не образуется! Полагая $y = 0$, находим $x = \pm\sqrt{2}$ и $b = \mp\sqrt{2}$. Теперь осталось только проверить $b = \sqrt{2}$ и $b = -\sqrt{2}$. В первом случае будет три решения — $(-\sqrt{2}\,;\,0)$, $(0\,;\,\sqrt{2})$ и $(0\,;\,-\sqrt{2})$ — а во втором только одно — $(\sqrt{2}\,;\,0)$. Так что <u>Ответ:</u> при $b = \sqrt{2}$.

2) При каких a уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет решений?

<u>Решение:</u> Применяя формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, перепишем уравнение так: $4\cos^2 x - 4a\cos x + a^2 = 0$, то есть $(2\cos x - a)^2 = 0$. Это уравнение имеет решения только при $|a| \leqslant 2$. Так что <u>Ответ:</u> при $|a| > 2$.

3) При каких a уравнение $5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$ имеет бесконечно много решений?

<u>Решение:</u> Полное раскрытие модулей затруднительно. Схитрим: подумаем, когда уравнение может иметь бесконечно много корней. Понятно, что при любом раскрытии модулей у нас получится линейное уравнение, из которого найдётся единственный x (который может ещё и не подойти под условия!). То есть решений будет конечное число. А как же решений может быть бесконечно много? А только если при раскрытии модуля совсем пропадёт x, и получится тождество. Понятно, что x сократится только если первый модуль раскрыть с минусом, а второй — с плюсом. Такое раскрытие возможно только при $x \leqslant 3a$ и $x \geqslant a^2$, и получится в этом случае $a^2 = 14a$. Это значит, что $a = 0$ или $a = 14$. Первый вариант не подойдёт, ибо неравенства будут означать, что $x = 0$, то есть не будет бесконечного количества решений. Обидно, но $a = 14$ тоже не подойдёт, так как упомянутые неравенства будут вообще противоречить друг другу! Так что <u>Ответ:</u> таких a нету :((