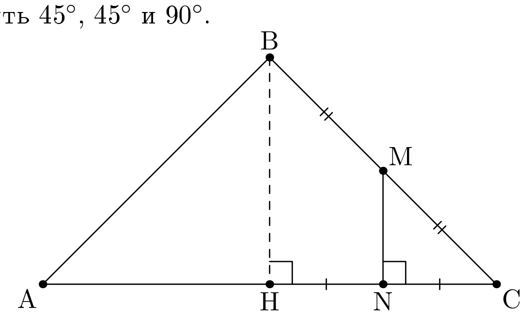
Решения задания прошлой недели.

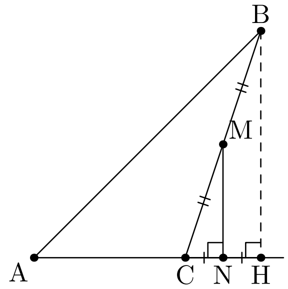
1) Около треугольника ABC описана окружность с центром O, угол AOC равен $60°$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

Решение: Пусть $\angle ABC = \beta$. Так как M — точка пересечения биссектрисс треугольника ABC, то $\angle AMC = 180° - (\angle MAC + \angle MCA) = 180° - \dfrac{\angle BAC + \angle BCA}{2} = 180° - \dfrac{180° - \beta}{2} = 90° + \beta$. Итак, необходимо найти β. Здесь есть два случая. Если O и B лежат в одной полуплоскости относительно AC, то $\beta = \frac{1}{2}\angle AOC = 30°$. Иначе, $\beta = \frac{1}{2}\angle AOC = 150°$. Итак, Ответ: $105°$ или $165°$.

2) В треугольнике ABC угол A равен $45°$. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр MN на сторону AC. Площади треугольников MNC и ABC относятся как $1 : 8$. Найдите углы треугольника ABC.

Решение: Возможны два варианта: $\angle C$ острый и $\angle C$ тупой. В каждом случае проведём высоту BH. Так как $BH = 2 \cdot MN$ (средняя линия треугольника вдвое короче основания), то $S_{BCH} = 4 \cdot S_{MNC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$. Если угол острый (левый рисунок), то отсюда следует, что H — середина AC, что означает, что углы треугольника ABC суть $45°$, $45°$ и $90°$.





Иначе (рисунок справа), $AH = BH$, то есть $\operatorname{tg} \angle BCH = \frac{BH}{CH} = 3$. В этом случае $\angle C = 180° - \operatorname{arctg} 3$ Так что Ответ: $45°$, $45°$ и $90°$ или же $45°$, $180° - \operatorname{arctg} 3$ и $\operatorname{arctg} 3 - 45°$.

3) Две окружности радиусов 5 и 2 внешне касаются. Прямая касается меньшей окружности в точке A и пересекает бо́льшую окружность в точках B и C, причём $BC = AB$. Найдите AC.

Решение: Пусть O_1 — центр большой, а O_2 — малой окружности. Опустим перпендикуляр O_1T на BC, T — середина BC. Пусть $CT = TB = x$, $AB = 2x$. Теперь опустим перпендикуляр O_2L на O_1T. В треугольнике O_1O_2T по теореме Пифагора имеем: $(\sqrt{25 - x^2} - 2)^2 + 9x^2 = 49$. Упрощая, сводим его к $\sqrt{25 - x^2} = 2x^2 - 5$, возводим в квадрат и находим $x = \frac{\sqrt{19}}{2}$. Отсюда $AC = 4x = 2\sqrt{19}$. Ответ: $2\sqrt{19}$.