Уроки №25-26 12-13.10.10

Дифференциал. Первообразная функция.

---

1. Производная.

Физический смысл производной:

если $S(t)$ — функция изменения расстояния, пройденного телом, от времени, то мгновенная скорость тела в точке t_0, это $v = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$.

Производной функции в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю.

Производная функции в точке x_0 — число, показывающее мгновенную скорость изменения функции в этой точке.

Что такое производная функция? Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке (существует производная в каждой точке промежутка, и односторонние пределы в концах, если они включены). Тогда соответствие между точками и значениями производной в точках определяет новую функцию, которая называется производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f'(x)$.

Геометрический смысл производной:

Уравнение секущей графика:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$. Касательная в точке — предельное положение секущей к графику в этой точке. Производная функции в точке x_0 показывает тангенс угла, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к графику функции в этой точке.

2. Дифференциал.

Рассмотрим выражение: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, откуда $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha()$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Поэтому $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$.

Таким образом, можно сказать, что $f'(x_0)\Delta x$ — главная часть приращения функции.

Обозначим $dx = \Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента в точке x_0.

***Определение* 1.** Назовём *дифференциалом функции в точке* x_0 главную часть приращения функции в точке x_0, и обозначим ее $df(x_0)$.

Таким образом, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$.

Пусть функция дифференцируема на промежутке. Определим дифференциал функции на промежутке $df(x)$:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Получаем, что $\Delta f(x) = df(x) + \alpha(\Delta x)\Delta x$. $df(x)$ зависит от Δx линейно, а в слагаемом $\alpha(\Delta x)\Delta x$ Δx еще и умножается на бесконечно малую, причем $\Delta x \to 0$. Графически это означает, что вблизи точки x_0 изменение функции «незначительно» отличается от ее дифференциала.

На графике $y = f(x)$ dx — это расстояние по горизонтали от точки $(x_0, f(x_0))$ до точки с абсциссой x, dy — расстояние по вертикали от точки $(x_0, f(x_0))$ до точки на касательной с абсциссой x, а $\Delta f(x)$ — расстояние по вертикали от точки $(x_0, f(x_0))$ до точки $(x, f(x))$.

При решении некоторых механических задач удобно считать, что скорость тела в некоторой малой окрестности момента времени t_0 не изменяется по сложному закону, а равна мгновенной скорости в момент t_0. Важно, чтобы эта «незначительная разница» действительно не влияла на правильность вычислений, а она не будет влиять, если рассматривать пределы при $\Delta x \to 0$.

Запись $\frac{dy}{dx}$ часто используют для обозначения производной. Имеется ввиду, что функция $y(x)$ дифференцируется по аргументу x. При этом в общем случае нельзя считать дробную черту знаком деления. Однако, в некоторых случаях как раз «делить можно», и эти случаи мы рассмотрим.

$dy = y'(x)dx$ — по определению дифференциала. А $\frac{dy}{dx} = y'(x)$ — так обозначена производная. Тем самым, получается, что производная $\frac{dy}{dx}$ — отношение двух дифференциалов.

Язык «дифференциалов» может намного упростить вычисления. Рассмотрим, например, как вычисляется производная $y = x^2$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x x_0 + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Зная, что квадратичную часть дифференциала можно «отбросить», запись можно сделать короче:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{2xdx}{dx} = 2x.$$

Знак предела при этом уже «заложен» в дифференциал, а dx^2 мы «отбрасываем».

3. Свойства дифференциала.

1) Пусть $f(g(t))$ — сложная функция — дифференцируема, тогда

$df = f'(g)dg = f'(g) \cdot g'(t)dt$. Откуда

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt}.$$

Докажем, что $d(f(x) + g(x)) = d(f(x) + d(g(x))$:

$$d(f + g) = (f + g)'dx = (f' + g')dx = f'dx + g'dx = df + dg.$$

Пользуясь соответствующими формулами для производных, найдите:

$$d(f(x)g(x)); \qquad d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right); \qquad d(f^{-1}(y)).$$

$(*)$ Пусть есть функция $y(x)$, заданная параметрически, то есть известны зависимости только $y(t)$ и $x(t)$, но неизвестна явная формула для $y(x)$, и пусть существуют $dy(t)$ и $dx(t)$. Найдите $\frac{dy}{dx}$.

Решение: выразим из уравнения $x = x(t)$ переменную t через переменную x, получив $t = t(x)$. Тогда можно рассматривать $y(x)$ как сложную функцию:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}.$$

Но возможно, что явно найти производную $\frac{dt}{dx}$ сложно, тогда воспользуемся производной обратной функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Таким образом, можно найти производную функции, заданной параметрически.

Задача: пусть $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, и

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Найдите $\frac{dy}{dx}$.

Решение:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Теперь можно выразить t через x и подставить в производную, а можно этого не делать, если, например, производная нужна для нахождения критических точек. В данном случае критические точки получаются: $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$, причем при $t = 0$ $x = a$ касательная вертикальная, а при $t = \frac{\pi}{2}$ $x = 0$ — горизонтальная.

4. Первообразная функция.

Определение 2. Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на промежутке I, если для всех $x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

Другими словами,

$$DF(x) = f(x)dx$$

.

Задача: найдите первообразную для $f(x)$, если

$$f(x) = 3x^2; \qquad f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad f(x) = \frac{\pi}{\cos^2 \pi x}.$$

Пусть для $f(x)$ существует $F(x)$. Верно ли, что из непрерывности $F(x)$ следует непрерывность $f(x)$? А наоборот?

Теорема .Если $f(x)$ непрерывна и имеет первообразную на некотором промежутке, то первообразная на этом промежутке также непрерывна.

Теорема .Если $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то все первообразные $f(x)$ определяются формулой $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$.

Доказательство:

Пусть $F(x)$ и $\varphi(x)$ — первообразные для $f(x)$. Тогда, по определению,

$$(F(x) - \varphi(x))' = F(x)' - \varphi(x)' = f(x) - f(x) = 0,$$

откуда $F(x) - \varphi(x) = C$.

5. Домашнее задание.

Разобраться с материалом урока, выучить либо повторить формулы (!!!).