Уроки №27-28 14-15.10.10

Неопределенный интеграл.

---

1. Производная.

Выпишите производные $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

Обратите внимание, что $\arcsin' x + \arccos' x = 0$. Верно ли, что $\arcsin x + \arccos x = const$? Если да, то какой? Тот же вопрос про арктангенс и арккотангенс.

2. Неопределенный интеграл.

***Определение* 1.** Множество всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом этой функции.

Обозначается $\int f(x)dx$. Здесь $\int$ — знак интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция; x – переменная интегрирования.

По определению $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C может принимать все значения из $\mathbb{R}$. Операция замены левой части этого равенства на правую называется интегрированием функции $f(x)$, также говорят «взять интеграл» от функции $f(x)$.

3. Свойства неопределенного интеграла.

0) $\int f'(x)dx = f(x) + C$

Поскольку одна из первообразных для $f'(x)$ равна $f(x)$, равенство выполняется по определению интеграла.

1) $\int df(x) = f(x)$.

Нужно расписать $df(x)$ по определению и воспользоваться предыдущим свойством.

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = \left(F(x) + C\right)' dx = f(x)dx$.

3) $\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Обозначим $y(x) = f(x) + g(x)$, и выразим левую и правую части равенства через первообразные, получим верное равенство.

4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Аналогично, выразим левую и правую части через первообразные, получим верное равенство.

4. Таблица простейших интегралов.

Для успешного выполнения операции интегрирования, помимо знания этих свойств, необходимо составить и выучить таблицу простейших интегралов. Это делается путем подбора и последующей проверки на основании таблицы производных:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arcctg} x + C_2$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$

5. Решение задач.

Вычислите:

$$1)\ \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3}{3x^2} dx; \qquad 3)\ \int \frac{3\sqrt{1-x^2} + 2 + 2x^2}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^4 - x^6}} dx;$$

$$2)\ \int \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{1 + x^2} dx; \qquad 4)\ \int f(x)dx,\ \text{если } f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x < 1; \\ x^2, & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases};$$

Решения.

$$1)\ \int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \int x^2 dx - \frac{2}{3} \int x dx + \int x^{-2} dx = \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{x} + C;$$

$$2)\ \int 2x + 1 + \frac{1}{1+x^2} dx = \int 2x dx + \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = x^2 + x + \operatorname{arctg} x + C;$$

$$3)\ \int \frac{3dx}{1+x^2} + \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 3 \operatorname{arctg} x + 2 \arcsin x + C.$$

4) Рассмотрим $x < 1$, тогда $F(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$. Если $x \geqslant 1$, то $F(x) = \frac{x^3}{3} + C_2$. Поскольку $f(x)$ — непрерывная функция ($\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$), то $F(x)$ — также непрерывная функция. Поэтому приравняем $\lim\limits_{x \to 1+0} F(x)$ и $\lim\limits_{x \to 1-0} F(x)$:

$$\frac{1^2}{2} + C_1 = \frac{1^3}{3} + C_2,$$

откуда $C_2 = C_1 + \frac{1}{6}$. Поэтому можно записать, что

$$\int f(x)dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + C, \text{ при } x < 1; \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{6} + C, \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Решите самостоятельно:

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$;

6) $\displaystyle\int \frac{x^6+1}{x^2+1}dx$;

7) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

8) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx$;

9) $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sin^4 2x + 2\sin^2 2x \cos^2 2x + \cos^4 2x}$;

10) $\displaystyle\int \cos(4x-5)dx$.

6. Замена переменной.

Пусть нужно вычислить $\int f(kx+b)dx$. Пусть $F(y)$ — первообразная функции $f(y)$. Заметим, что $F'(kx+b) = kf(kx+b)$, поэтому

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Или, по-другому:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(y)dy, \text{ где } y = kx+b.$$

В общем случае, если есть сложная функция $f(\varphi(x))$, то $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$, поэтому

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x).$$

Т. е., если обозначить $\varphi(x)$ за y, получим

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(y)dy.$$

Например, вычислим интегралы:

$$11)\ \int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln(x-2) + C;$$

$$12)\ \int \frac{dx}{4x-5} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x-5)}{4x-5} = \frac{1}{4}\ln(4x-5) + C;$$

13) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$;

14) $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^4}$;

15) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 7xdx$;

16) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$;

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$.

В задаче 13 нужна замена $y = x^4$, тогда $dy = 4x^3dx$, а в задаче 14 — замена $y = x^2$, тогда $dy = 2xdx$. В задаче 15 потребуется замена $y = \cos 7x$. Замены в задачах 16 и 17 достаточно очевидны.

7. Домашнее задание.

1) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{x}{2}+8\right)dx$;

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2(5x-6)}$;

3) $\displaystyle\int x\sin x^2dx$;

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$;

5) $\displaystyle\int \frac{x^4+6x^3+3x+4\sqrt[3]{x^2}dx}{x\sqrt{x}}$;

6) $\displaystyle\int \sin^2 3xdx$;

7) $\displaystyle\int \cos 6x\cos 3xdx$;

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$;

9) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$;

10) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^4 2xdx}{1+4x^2}$;

11) $\displaystyle\int \operatorname{ctg}(8x-1)dx$;

12) $\displaystyle\int \cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)dx$.

Ответы:

1) $2\sin\left(\dfrac{x}{2}+8\right)+C$;

2) $-\dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}(5x-6)+C$;

3) $\dfrac{1}{2}\cos x^2+C$;

4) $\arcsin\dfrac{x}{5}+C$;

5) $\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}+\dfrac{12}{5}x^2\sqrt{x}+6\sqrt{x}x+24\sqrt[6]{x}+C$;

6) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 6x}{12}+C$;

7) $\dfrac{1}{18}\sin 9x+\dfrac{1}{6}\sin 3x+C$;

8) $\operatorname{arctg}(x-3)+C$;

9) $\dfrac{1}{3}\arcsin x^3+C$;

10) $\dfrac{1}{10}\operatorname{arctg}^5 2x+C$;

11) $\dfrac{1}{8}\ln\sin(8x-1)+C$;

12) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}\cos 8x+C$.