Уроки №31-32 21-22.10.10

Неопределенный интеграл.

---

1. Самостоятельная работа. (45 минут)

Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2dx}{x\sqrt{x}}$;

2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sin\left(3-\frac{x}{4}\right)\right)dx$;

3) $\displaystyle\int \frac{xdx}{1+x^4}$;

4) $\displaystyle\int \cos^2 4xdx$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

6) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^4 3xdx}{\sin^2 3x}$.

Вычислите интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{(2-3\sqrt{x})^2dx}{x^3}$;

2) $\displaystyle\int \left((2x+1)\cos(x^2+x-1) + \frac{1}{x+2}\right)dx$;

3) $\displaystyle\int \operatorname{tg} xdx$;

4) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}dx$;

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$;

6) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^4 \frac{x}{3}dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$.

2. Сведение интегралов к известным.

1) Вычислите $\int \frac{dx}{x}$ при $x \in \mathbb{R}$.

Решение: при $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $x > 0$, тогда $\int f(x)dx = \ln x + C$. Если $x < 0$, то сделаем замену $t = -x$, тогда $dt = -dx \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-dt}{-t} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(-x) + C.$$

Таким образом, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ на всей $D(f)$.

2) Вычислите $\int a^x dx$.

3) Вычислите $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$. (Замена $t = \frac{x}{a}$.)

4) Вычислите $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, если дискриминант знаменателя меньше нуля.

Решение:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a(x-\frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}} = \frac{4a}{-D}\int \frac{dx}{\frac{4a^2}{-D}(x-\frac{b}{2a})^2+1}$$

Сделаем замену: $t = \frac{2|a|}{\sqrt{-D}}(x - \frac{b}{2a})$, тогда $dt = \frac{2|a|}{\sqrt{-D}}dx$, поэтому

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2|a|}{\sqrt{-D}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2|a|}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg}(t) + C$$

5) Вычислите $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$ (не пользуясь предыдущей формулой).

6) Вычислите $\int \frac{dx}{\sqrt{15-6x-9x^2}}$.

7) Вычислите $\int \sin 2x \cos^5 2x dx dx$.

Мы использовали замену переменной в интеграле $\int f(x)dx$ следующим образом: выбирали $t = \varphi(x)$ так, чтобы $f(x)dx$ было равно $g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(t)dt$. Теперь рассмотрим другой случай применения замены переменной:

8) Вычислите $\int \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение: пусть $x = \sin t$, тогда $dx = \cos t dt$, $t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$$\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt.$$

9) Вычислите $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$.

10) Вычислите производную $\ln(x + \sqrt{x^2+a})$.

11) Вычислите $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+34}}$.

12) Представьте дробь $\frac{1}{x^2-a^2}$ в виде суммы двух дробей с линейными знаменателями и равными числителями.

13) Вычислите $\int \frac{dx}{x^2+6x+8}$.

Итак, интегралы можно сводить не только к табличным, но и к интегралам следующего вида:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}; \qquad \int \frac{dx}{x^2-a^2}; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \qquad \int \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

3. Домашнее задание

Решите задачи 9, 12, 13.

Найдите интегралы:

14) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 17) $\int \frac{dx}{1+e^x}$; 20) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-12x-7}}$;

15) $\int \sin^3 x \cos x dx$; 18) $\int \frac{\cos x dx}{5+\sin^2 x}$; 21) $\int \sqrt{12x-4x^2+7}dx$;

16) $\int \frac{dx}{x \ln x}$; 19) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2+7}}$; 22) $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x}dx$.