

Дифференциальные уравнения.**1. Решение задачи:**

За какое время вытечет вся вода из цилиндрической бочки высотой 2 м и диаметром основания 1 м через отверстие в дне диаметром 1 см?

В ходе обсуждения рассматриваются две более простые задачи:

а) Пусть вода вытекает. Верно ли, что половина воды вытечет за половину времени? Если нет, то первая половина воды вытечет быстрее или медленнее, чем вторая?

б) Если есть вертикальная труба, и по ней течет вода под действием силы тяжести, чему равна скорость вытекания?

Итог обсуждения: *уровень воды зависит от скорости вытекания, а скорость вытекания зависит, в свою очередь, от уровня воды*, и это не дает возможности составить уравнение привычного вида.

Формула скорости вытекания жидкости $v = \varphi \cdot \sqrt{2gh}$.

Рассмотрим изменение объема за малый промежуток времени:

$$\Delta V \approx s \cdot v \Delta t = s\varphi \cdot \sqrt{2gh(t)} \Delta t.$$

С другой стороны, $\Delta V \approx -S\Delta h(t)$. (Минус потому, что высота уменьшается.) При делении на Δt и переходе к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем уравнение

$$h'(t) = -\varphi \frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}.$$

Что неизвестно в этом уравнении? (время и **функция** $h(t)$).

2. Изучение нового материала. Определения.

Определение 1. Уравнение, содержащее переменные, неизвестную функцию от этих переменных и ее производные называется *дифференциальным*.

Определение 2. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных.

Например, уравнение из задачи о вытекании воды является дифференциальным уравнением 1 порядка.

Комментарий: функция и переменные, строго говоря, не обязательны в уравнении, обязательным является лишь наличие хотя бы одной производной.

1 задание листочка: из записанных уравнений надо выбрать дифференциальные и указать их порядок.

3. Решение задач.

Решение задач 2-7 из листочка. Вспомогательные формулы:

| | |
|--|---|
| $V_{\text{цилиндра}} = S \cdot H$ $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} S \cdot H$ $F = ma$ — 2 закон Ньютона $F = -kx$ — закон Гука $F = \gamma \frac{Mm}{x^2}$ — закон всемир. тяготения $v = -kt$ — скорость радиоакт. распада $v = \varphi \cdot \sqrt{2gh}$ — скорость вытек. жидкости | $v(t) = x'(t)$ $a(t) = v'(t)$ $a(t) = x''(t)$ |
|--|---|

Листочки с заданиями

1) Определите, какие из уравнений являются дифференциальными и назовите порядок:

1) $y(x)' = 0$; 2) $y''(x) = y(x)$; 3) $f(x) = e^x + e^{-x}$; 4) $(y(x)'')^3 = y(x)^2 + x - 1$;
5) $h' = (\ln x)''$; 6) $z' = \frac{2xz}{x^2 + z^2}$; 7) $(\sin x)' = x^3 + 4$; 8) $f''' - 4f'' + 4f = \operatorname{tg} x$.

2) Шарик с массой m , лежащий на гладком горизонтальном полу, прикреплен к стене пружинкой. Составьте дифференциальное уравнение для отклонения шарика от положения равновесия.

3) Точка массой m падает на Землю под действием силы тяготения. Составьте дифф. уравнение.

4) Составьте дифференциальное уравнение радиоактивного распада.

5) Парашютист делает затяжной прыжок. Сила трения о воздух пропорциональна квадрату скорости. Считая, что сила тяжести не меняется с высотой, составьте дифференциальное уравнение.

6) Из цилиндрической бочки высотой 2 м и диаметром основания 1 м через отверстие в дне диаметром 1 см вытекает вода. Составьте дифференциальное уравнение для этой задачи.

7) Воронка имеет форму конуса, обращённого вершиной вниз. В вершине конуса есть круглое отверстие. Составьте дифференциальное уравнение для вытекания воды из воронки.

8) Для некоторых химических реакций мгновенная скорость реакции пропорциональна произведению концентраций двух реагирующих веществ, причем в процессе реак-

ции одна молекула первого вещества реагирует с одной молекулой второго вещества. Напишите дифференциальное уравнение для количества y вещества, возникшего к моменту времени t (в молях), если начальная концентрация первого реагента равнялась a , а второго b (объем равен 1 литру).

9) Составьте дифференциальное уравнение кривой, для которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

10) Составьте дифференциальное уравнение кривой, для которой отрезок касательной, заключенный между точкой касания и точкой пересечения с осью абсцисс, имеет длину a .

11) Составьте дифференциальное уравнение движения пули, считая, что сила сопротивления движения пули пропорциональна квадрату скорости.

1. Разбор домашнего задания прошлого урока

2. Домашнее задание Решите задачи 8, 9, 10, 11.