Уроки № 45-46 26.11.10

Дифференциальные уравнения.

---

1. Разбор домашнего задания

В задаче 1 ответ

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В задаче 2 ответ

$$x(t) = \sqrt{x_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin \left(\omega t + \arcsin \frac{x_0 \omega}{\sqrt{x_0^2 \omega^2 + v_0^2}} \right)$$

Задача 3. Рассмотрим уравнение

$$h'(t) = -\varphi \frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}$$

Поделим на $2\sqrt{h(t)}$ и возьмем интегралы по dt от обеих частей:

$$\int \frac{h'(t)dt}{2\sqrt{h(t)}} = -\varphi \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \int dt$$

Получим

$$\sqrt{h(t)} = -\varphi \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} t + C$$

Начальное условие $h(0) = 2$, поэтому $C = \sqrt{2}$, откуда

$$\sqrt{h(t)} = -\varphi \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} t + \sqrt{2}$$

Заметим, что $h(t)$ уменьшается с течением времени, и в какой-то момент становится равной 0. Для всех $h(t) > 0$ мы нашли явную формулу. Поскольку $h(t)$ непрерывна, то $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = h(t_0)$, и если формула верна при всех $t \to t_0$, то она будет верна и при $t = t_0$. Поэтому мы получили решение задачи при $t \in [0; 2]$.

Найдем t, при котором $h = 0$:

$$t = \frac{2}{\varphi \sqrt{g}} \cdot \frac{S}{s}$$

Подставим $\varphi = 0,6$, $\frac{S}{s} = 10^4$ и переведем секунды в часы:

$$t = \frac{2}{\varphi \sqrt{g}} \cdot \frac{S}{s} = \frac{2 \cdot 10^4}{0,6 \cdot \sqrt{9,8} \cdot 60^2} = \frac{10^3}{3 \cdot \sqrt{9,8} \cdot 36} = \frac{10}{3\sqrt{9,8}} \cdot \frac{100}{36} \approx 3$$

Ответ: 3 часа.

Задача 4:

Рассмотрим уравнение:

$$x''(t) + \omega^2 x = 0,$$

перепишем его в виде:

$$v'(t) = \omega^2 x$$

Домножим обе части на $v = x'$ и возьмем интегралы по dt:

$$\int v'vdt = -\omega^2 \int x'xdt \qquad \Longrightarrow \qquad \int vdv = -\omega^2 \int xdx,$$

откуда

$$v^2 = -\omega^2 x^2 + C_1$$

C_1 можно найти из начальных условий $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$:

$$(x')^2 = -\omega^2 x^2 + (v_0^2 + \omega^2 x_0^2)$$

или

$$x' = \pm\sqrt{-\omega^2 x^2 + (v_0^2 + \omega^2 x_0^2)}.$$

Поделим на корень и проинтегрируем:

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 x^2}{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}} = \pm \int dt$$

Обозначим $y = \frac{\omega x}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}$, тогда $dx = \frac{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}}{\omega} dy$, в результате замены получим

$$\frac{1}{\omega} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm \int dt \qquad \Longrightarrow \qquad \arcsin y = \pm\omega t + C_2,$$

откуда

$$x(t) = \sqrt{x_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\pm\omega t + C_2\right),$$

или

$$x(t) = \pm\sqrt{x_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + C_3\right),$$

Поскольку $\sin\alpha = -\sin\pi + \alpha$, можно считать, что

$$x(t) = \sqrt{x_0 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + C_4\right).$$

C_4 можно найти из начальных условий, и она соответствует формуле из задачи 2.

2. Уравнения с разделяющимися переменными.

***Определение* 1.** Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Не каждое уравнение можно представить в таком виде. Например, уравнение $y' = y+x$ не является таковым.

1) Пусть есть такая точка $y_0 \in D(g)$, что $g(y_0) = 0$. Тогда функция $y = y_0$ является решением этого уравнения, т. к. $y' = 0$, и $g(y) = 0$.

2) Рассмотрим $\Omega = \{(x;y)\} \subset D(f) \times D(g)$ такие, что $g(y) \neq 0$. В этой области уравнение можно переписать в виде

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x),$$

и

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Если произвести интегрирование, получится уравнение, содержащее неизвестную функцию и переменную, но без производных. В домашних задачах 3 и 4 как раз были уравнения с разделяющимися переменными, частный случай вида $y' = g(y)$.

3. Решение дифференциального уравнения в задаче про парашютиста:

Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Рассмотрим уравнение падения парашютиста:

$$v' = g - kv^2,$$

где k — коэффициент пропорциональности, деленный на массу парашютиста. Заметим, что $v(0) = 0$ и $g - kv^2$ больше нуля. Поэтому можем решить уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = t + C,$$

или

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\left(\int \frac{d\sqrt{k}v}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v} - \int \frac{d\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right) = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \ln \frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v} = t + C$$

Из начальных условий находим, что $C = 0$. Выразим v:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{gk}t} - 1}{e^{2\sqrt{gk}t} + 1}$$

Вспомним функции гиперболический синус и косинус:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Определим гиперболический тангенс как отношение синуса и косинуса:

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Поэтому формула для скорости будет

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{th}(\sqrt{gk}t)$$

Заметим, что $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{th} z = 1$. Поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$. Значит, скорость падающего тела не может расти неограниченно.

Экспериментально известно, что предельная скорость падающего человека 50 м/с. Получите формулу для падения парашютиста в воздухе, не зависящую от k.

Найдите, за сколько секунд свободного падения скорость парашютиста достигнет 90% предельной.

Можно доказать, что при малых z $\operatorname{th} z \approx z$, причем при $z < 0,5$ относительная погрешность будет меньше 0,1. Выведите приближенную формулу скорости падения парашютиста при малых t, и определите, при каких t ей можно пользоваться.

4. Решение задач

Решите уравнения:

1) $y' = (1 + x^2)(1 + y^2)$, если $y(0) = 1$.

2) $x^{-5}y' = 2y^4$, если $y(1) = -1$.

3) $\frac{y'}{\cos x} = \frac{\cos y}{\sin 2y}$, $y(0) = \frac{\pi}{3}$.

4) Найдите общее решение уравнения $y' = \frac{y^2}{x}$.

Решите уравнения:

5) $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$, $y(0) = -1$.

6) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

7) Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет вся вода?

8) Лодка замедляет движение под действием сопротивления воды, пропорционального скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5м/с, через 4 с ее скорость становится равна 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

5. Домашнее задание Решите задачи, не решенные в классе.