Уроки № 69-70 14.01.11

Логарифмические и показательные уранвения.

---

1. Задачи из Ломоносов-2007

7) Определите, под каким углом видно из начала координат множество, заданное на координатной плоскости неравенством $14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0$.

Это множество ограничено, т. к. при больших по модулю x, y левая часть положительна. Точка $(0; 0)$ не принадлежит множеству, и все точки прямой $x = 0$ не принадлежат множеству. Таким образом, существуют два луча, лежащих на прямых вида $y = kx$, с началом в $(0; 0)$, пересекающие границу этого множества, такие, что все множество расположено в угле между ними.

Рассмотрим уравнение $14x^2+xy+y^2+14x+2y+4 = 0$, задающее границу множества, и возьмем $y = kx$. При фиксированном k это будет квадратное уравнение относительно x (очевидно, что старший коэффициент > 0; пусть D — его дискриминант). Если при некотором k оно имеет корни ($D \geqslant 0$), значит, прямая $y = kx$ пересекает множество. Таким образом, все k, удовлетворяющие неравенству $D \geqslant 0$, соответствуют прямым, имеющим общие точки с границей множества, и значит, наименьшее и наибольшее из этих k являются искомыми для лучей, угол между которыми надо найти.

После нахождения k надо определить, в каком из четырёх углов, образованных прямыми, находится множество, а после этого вычислить угол, расположенный между лучами.

8) Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в 70° и 80°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от неё на расстояние 11. Найдите объём части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

Возможны два случая (углы внутренние односторонние или соответственные), которые рассматриваются аналогично. Если цилиндр пересечь плоскостью так, что она пройдет через граничные точки противоположных оснований, то цилиндр разобьется на два тела равного объема. Таким образом, нужно посчитать объемы соответствующих кусочков, выразив их через тангенсы углов.

9) Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

Во-первых, ОДЗ: $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$.

Во-вторых, заметим, что $\operatorname{tg} 3x \geqslant 0$, т.е. $|\operatorname{tg} 3x| = \operatorname{tg} 3x$. Кроме того,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x}{\cos x \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x}$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{|\sin x \sin 2x|}{|\cos x \cos 2x|} \cdot \frac{\sin 3x}{\cos 3x} + \frac{|\sin 3x|}{|\cos x \cos 2x|} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0.$$

Нам нужно найти решение на $(0; \pi]$. Нам подходят точки, где $\sin 3x = 0$ (с учетом ОДЗ), и кроме этого, мы можем рассматривать решение на кусочках промежутка $(0; \pi]$, где $\sin 3x > 0$, $\cos 3x > 0$ и $\sin 3x < 0$, $\cos 3x < 0$.

2. Показательные уравнения.

$$25^{2\sqrt{x+3}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x+3}} + 5 = 0; \qquad 9^{\sin^2 x} + 72 = 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x - 3};$$

$$25^{-\frac{3}{x}} + 35^{-\frac{3}{x}} = 49^{-\frac{3}{x}}; \qquad \frac{7^x - 2 \cdot 7^{-x}}{7^x + 2 \cdot 7^{-x}} = \frac{5}{9}.$$

3. Логарифмические уравнения.

$$\log_8 \log_9 \log_{7x+6}\Big((7x+6)^9 + x^2 - x - 56\Big) = 0;$$
$$\log_{(x+3)^2}(x^3 - 9x^2 - 10x) = \log_{x+3}\sqrt{x^3 - 10x^2 - x + 22};$$
$$\frac{2}{5}\log_{\sqrt{x}} 3 + \frac{2}{3} = \log_3 2 \cdot \log_{32} x + \log_x 3;$$
$$\log_{\frac{2}{3}}(\ln x^3 - 2) + \log_{\frac{2}{3}}(\ln x^5 - 4) = 0.$$

4. Домашнее задание. Прочитать §§5,6, решить стр. 95, №№ 7, 10, 11, 12, стр. 103 №№ 2, 10, 11, 12.