11в класс, 30 декабря 2010

1) Вычислите $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если $\sin(\alpha+\beta) = 0,8$ и $\cos(\alpha-\beta) = 0,3$.

2) Решите уравнение $\sqrt{2^{(x^2)}} = \left(2^{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

3) Какие значения может принимать выражение $\log_{b_{11}b_{50}}(b_1 b_2 \ldots b_{60})$, если b_1, b_2, … — геометрическая прогрессия?

4) Решите неравенство $\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1$.

5) На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6) Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК$(a, b) = 60$ и НОК$(a, c) = 270$. Найдите НОК(b, c).

7) Определите, под каким углом видно из начала координат множество, заданное на координатной плоскости неравенством $14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0$.

8) Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиусом 5, образуя с его осью углы в 70° и 80°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от неё на расстояние 11. Найдите объём части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9) Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

10) В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3, 5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Докажите, что от этого средня оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное ее значение после замены а) одной оценки «4»; б) всех оценок «4».