

Площадь.

Определение. Каждому многоугольнику ставится в соответствие величина S , называемая площадью и обладающая следующими свойствами:

- 1) $S > 0$
- 2) Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме их площадей.
- 3) Равные многоугольники имеют одну и ту же площадь.
- 4) Площадь квадрата со стороной 1 см равна 1 см².

Теорема 1. Площадь квадрата со стороной $1/n$ см равна $1/n^2$ см².

Теорема 2. Площадь S прямоугольника со сторонами a см и b см равна ab см².

Доказательство: Пусть числа a и b рациональны. Тогда представим их в виде дробей (возможно, сократимых) с одинаковыми знаменателями: m/n и k/n . Разобьем прямоугольник на mk квадратов со стороной $1/n$ каждый. Площадь каждого равна $1/n^2$. Тогда площадь прямоугольника $S = mk \cdot 1/n^2 = ab$.

Случай, когда хотя бы одна из сторон выражается иррациональным числом доказывается рассмотрением последовательности все более точных рациональных приближений длины этой стороны.

Площадь параллелограмма. $S = ah$.

Площадь треугольника. $S = ah/2$.

Площадь прямоугольного треугольника. $S = ab/2$.

Задачи для решения в классе:

1. Найдите высоту прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.
2. Атанасян, №№ 461, 464(а)

Домашнее задание: Атанасян, №№ 460, 465, 470, 472.

Гимназия №1543. 9-А класс. Геометрия – 8. 7 октября 2010 г.

Отношение площадей

1. Докажите, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
2. Пусть X – точка на стороне AC треугольника ABC . Докажите, что $S_{ABX} : S_{CBX} = AX : CX$.
3. На сторонах AB и BC треугольника ABC площади 1 взяты соответственно точки D и E .
 - а) Известно, что $AD : DB = 2 : 3$, $BE : EC = 4 : 5$. Найдите площади треугольников ABE , BDE и ADE .
 - б) Отрезки AE и CD пересекаются в точке O . Известно, что $AD : DB = 2 : 1$, $DO : OC = 1 : 4$. Найдите площади треугольников AOD и AOC .
4. Основание AD трапеции $ABCD$ втрое больше основания BC . Диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Определите, какую часть от общей площади трапеции составляют треугольники AOB , BOC , COD и AOD .
5. Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ пополам. Отрезки AM и BD пересекаются в точке O . Определите, какую часть от общей площади параллелограмма составляет каждая из четырех образовавшихся частей.
6. Пусть на одной стороне угла с вершиной O отмечены точки A и C , а на другой стороне – точки B и D . Докажите, что тогда $S_{AOB} : S_{COD} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OB}{OD}$.
7. Докажите, что площадь четырехугольника, образованного серединами сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, равна половине площади $ABCD$.

Домашнее задание

8. В прямоугольном треугольнике с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$ проведены медиана CM , биссектриса CL и высота CH . Найдите площади треугольников ACH и CLM .
9. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна S . M – середина стороны BD , а N – середина стороны CD . Найдите площади треугольников ABM , AND , MCN и AMN .
10. Как через вершину данного а) треугольника; б) параллелограмма провести прямую, делящую его площадь в отношении 2:3?
11. Докажите, что медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

Вычисление отношений с помощью площади

1. На сторонах АВ и АС треугольника АВС взяты соответственно точки М и К так, что $AM:MB=1:3$, $AK:KC=2:5$. Найдите отношение площадей треугольников АМК и АВС.
2. Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке О. Найдите отношение площадей треугольников АВС и АСD, если $AO : OC = 2 : 3$, $BO : OD = 4 : 5$.
3. Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке О. Докажите, что

$$\boxed{S_{ABC} : S_{ADC} = BO : OD}.$$

4. На сторонах АС и ВС треугольника АВС взяты соответственно точки Е и D. . Отрезки AD и BE пересекаются в точке О. Найдите $BO : OE$, $AO : OD$, если $AE : EC = 5 : 3$, $BD : DC = 2 : 7$.
5. На сторонах АВ, ВС, АС треугольника АВС взяты соответственно точки К, Е, М. Отрезки ВМ и КЕ пересекаются в точке О. Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, $BE : EC = 4 : 3$, $AM : MC = 3 : 1$. Найдите $BO : OM$ и $KO : OE$.

Домашнее задание

6. Диагонали выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точке О. Известно, что $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{AOD} = S_3$. Найдите S_{COD} .
7. На стороне АВ параллелограмма ABCD отмечена точка К, причем $AK : KB = 1:2$. Отрезок КС пересекает диагональ BD в точке М. $S_{BMC} = S$. Найдите площади треугольников ВКМ, СМD и четырехугольника АКMD.
8. Площадь треугольника АВС равна 14 см^2 . На его сторонах АВ и ВС взяты соответственно точки D и С. Отрезки АЕ и CD пересекаются в точке О. $AD : DB = 3 : 4$, $CE : EB = 6 : 7$. Найдите:
 - а) отношение отрезков $DO : OC$;
 - б) площадь треугольника АОС;
 - в) площадь четырехугольника DBEO.
9. На сторонах АВ, ВС, АС треугольника АВС взяты соответственно точки C_1 , A_1 , B_1 . При этом $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 3$. Найдите, в каком отношении отрезки A_1B_1 и CC_1 делятся точкой их пересечения.

Площадь и отношения

1. В треугольнике АВС площади S проведена медиана СМ, точка К принадлежит стороне ВС, отрезки АК и СМ пересекаются в точке О. Известно, что $AO : OK=4 : 3$. Найдите:
 - а) площади треугольников АМС, КМС и КМВ;
 - б) отношение отрезков ВК : КС;
 - в) площади треугольников АСК и АМК;
 - г) отношение отрезков МО : ОС.отношение площадей треугольников СОК и АВС.
2. На сторонах АВ, ВС, АС треугольника АВС взяты соответственно точки К, N и М. Отрезки ВМ и KN пересекаются в точке О. Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, $BN : NC = 4 : 3$, $AM : MC = 3 : 1$. Найдите $BO : OM$ и $KO : ON$.
3. На стороне ВС параллелограмма ABCD отмечена точка М. Докажите, что площадь треугольника АМD равна половине площади параллелограмма ABCD.
4. Точка Х расположена внутри параллелограмма ABCD. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.
5. На сторонах AD, BC и CD параллелограмма ABCD отмечены соответственно точки Т, К и М, делящие их в отношениях $AT : TD = 3 : 2$, $BK : KC = 1 : 4$, $CM : MD = 1 : 2$.
 - а) Пусть площадь параллелограмма равна S. Найдите площади треугольников ТМD, АТМ, АВК, КСМ, АКМ.
 - б) Найдите, в каком отношении отрезок КТ делится прямой АМ.

Домашнее задание

- На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK : KC = 2 : 1$, а на стороне BC точка M такая, что $BM : MC = 3 : 1$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O . Найдите:
 - Отношение площадей треугольников AMK и AMB к площади треугольника ABC ;
 - отношение отрезков $BO : OK$.
- На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 , B_1 . При этом $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 3$. Найдите, в каком отношении отрезки A_1B_1 и CC_1 делятся точкой их пересечения.
- Точка P делит сторону BC треугольника ABC в отношении $BP : PC = 1 : 5$. Через точку P проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках M и K . Какую часть площади треугольника ABC составляют площади каждого из треугольников CPM и PVK ?

Гимназия №1543. 9-А класс. Геометрия – 10. 13 октября 2010 г.

Площадь и отношения

- В треугольнике ABC площади S проведена медиана CM , точка K принадлежит стороне BC , отрезки AK и CM пересекаются в точке O . Известно, что $AO : OK = 4 : 3$. Найдите:
 - площади треугольников AMC , KMC и KMB ;
 - отношение отрезков $BK : KC$;
 - площади треугольников ACK и AMK ;
 - отношение отрезков $MO : OC$.отношение площадей треугольников $СОК$ и ABC .
- На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC взяты соответственно точки K , N и M . Отрезки BM и KN пересекаются в точке O . Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, $BN : NC = 4 : 3$, $AM : MC = 3 : 1$. Найдите $BO : OM$ и $KO : ON$.
- На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M . Докажите, что площадь треугольника AMD равна половине площади параллелограмма $ABCD$.
- Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.
- На сторонах AD , BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки T , K и M , делящие их в отношениях $AT : TD = 3 : 2$, $BK : KC = 1 : 4$, $CM : MD = 1 : 2$.
 - Пусть площадь параллелограмма равна S . Найдите площади треугольников TMD , ATM , ABK , KCM , AKM .
 - Найдите, в каком отношении отрезок KT делится прямой AM .

Домашнее задание

- На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K такая, что $AK : KC = 2 : 1$, а на стороне BC точка M такая, что $BM : MC = 3 : 1$. Отрезки AM и BK пересекаются в точке O . Найдите:
 - Отношение площадей треугольников AMK и AMB к площади треугольника ABC ;
 - отношение отрезков $BO : OK$.
- На сторонах AB , BC , AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 , A_1 , B_1 . При этом $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 3$. Найдите, в каком отношении отрезки A_1B_1 и CC_1 делятся точкой их пересечения.
- Точка P делит сторону BC треугольника ABC в отношении $BP : PC = 1 : 5$. Через точку P проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках M и K . Какую часть площади треугольника ABC составляют площади каждого из треугольников CPM и PVK ?

Подсчет площади двумя способами. Биссектриса. Вписанная окружность

1. Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон не зависит от выбора точки.
2. Докажите с помощью площади, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
3. В прямоугольном треугольнике с катетами $AC = 6$ и $BC = 8$ провели биссектрисы AA_1 и CC_1 . Определите площади частей, на которые они разбили треугольник.
Теорема. $S = pr$, где S – площадь треугольника, p – его полупериметр, r – радиус вписанной окружности.
4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 10, 10 и 8.

Домашнее задание

5. В треугольнике ABC стороны $AB = BC = 5$, $AC = 6$. O – центр вписанной окружности. Найдите площадь треугольника AOB и расстояние от точки O до прямой AB .
6. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 5 и 12.
7. Высота равностороннего треугольника равна h . Найдите сумму расстояний от некоторой точки внутри этого треугольника до его сторон.
8. Атанасян, № 482

Площадь: разные задачи

1. Докажите, что если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC , то $S_{ABD} = S_{ACD}$.
2. Докажите, что если $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC , и ее диагонали пересекаются в точке O , то $S_{AOB} = S_{COD}$.
3. $ABCD$ – трапеция с основаниями AD и BC , и ее диагонали пересекаются в точке O . Известно, что $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$. Найдите S_{ABCD} .
4. Докажите формулу площади ромба: $S = d_1 d_2 / 2$.
5. Продолжения сторон DC и AB вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Площадь треугольника BCE в 8 раз меньше площади $ABCD$. Найдите периметр треугольника BCE , если $AB = 7$, $DC = 11$, $AD = 18$.
6. Атанасян, № 531

Домашнее задание

7. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .
8. Атанасян, № 523
9. В треугольнике ABC точка L делит пополам отрезок BC , а точка K делит пополам отрезок BL . Из точки A через точки K и L проведены лучи, и на них отложены вне треугольника ABC отрезки $LD = AL$ и $KF = 1/3 AK$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $KLDF$.
10. Прямые, проходящие через точку на стороне треугольника и параллельные двум другим сторонам, отсекают от него два треугольника с площадями S_1 и S_2 . Найдите площадь данного треугольника. *Указание:* проведите диагональ в получившемся параллелограмме и вспомните задачу №3.