Гимназия №1543. 9-А класс. Геометрия – 16. 16 ноября 2010г.

Умножение вектора на число

Определение. ***Произведением числа** k **и ненулевого вектора*** $\vec{a}$ *называется вектор* $k\vec{a}$*, длина которого равна* $|k|\cdot|\vec{a}|$*, причем* $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ *при* $k > 0$ *и* $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ *при* $k < 0$. $k\vec{a} = \vec{0}$ *при* $k = 0$ *или* $\vec{a} = \vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число.

1. $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$ *(однородность)*
2. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ *(распределительный закон относительно чисел)*
3. $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$ *(распределительный закон относительно векторов)*

Задачи

1. Докажите, что если точка М – середина отрезка АВ, то для любой точки плоскости О верно равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.
2. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы треугольника АВС. а) Найдите $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$. б) Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.
3. Докажите, что если точка М – точка пересечения медиан треугольника АВС, то: а) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$; б) для любой точки плоскости О верно равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$
4. Пусть точка М – середина отрезка АВ, точка К – середина отрезка CD. Представьте вектор $\overrightarrow{MK}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.
5. Пусть М и M_1 – точки пересечения медиан треугольников АВС и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}\right)$.

Домашнее задание

6. Пусть ABCD – параллелограмм, О – точка пересечения его диагоналей. Докажите, что для произвольной точки Х выполняется равенство: $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XD} = 4\overrightarrow{XO}$.
7. Атанасян, №№777, 785

Дальнейший материал в напечатанном виде не выдавался, но был изучен на уроках

Условие коллинеарности векторов. Разложение вектора по базису.

Теорема. *Вектор* $\vec{a}$ *коллинеарен ненулевому вектору* $\vec{b}$ *тогда и только тогда, когда найдется такое число k, что* $\vec{a} = k\vec{b}$.

Теорема о разложении по базису. *Любые неколлинеарные векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *образуют базис, т. е. для каждого вектора* $\vec{c}$ *найдутся такие числа x и y, что* $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

8. Точки D и E делят стороны АВ и ВС треугольника АВС в отношениях AD : DB = 5 : 2, BE : EC = 4 : 1. Разложите вектор $\overrightarrow{DE}$ по базису $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
9. Медианы треугольника АВС пересекаются в точке О. Разложите вектор $\overrightarrow{AO}$ по базису $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
10. Пусть ABCD – параллелограмм, Н – середина стороны AD, Р – середина стороны CD, точки К и М делят сторону ВС в отношении ВК : КМ : МС = 1 : 2 : 1.
    Разложите по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{KP}$.
11. На стороне АВ треугольника АВС взята точка Х. Разложите вектор $\overrightarrow{CX}$ по базису $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, если АХ : ХВ = 2 : 3.

Теорема. *Пусть точка Х делит отрезок АВ в отношении АХ : ХВ = m : n. Тогда для любой точки О выполняется равенство*

$$\boxed{\overrightarrow{OX} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}}.$$

Применение векторов к решению задач.

12. На сторонах ВС и СД параллелограмма ABCD заданы соответственно середины М и К. Прямые DM и АК пересекаются в точке О. Вычислите отношения DO:OM и АО:ОК.
13. На стороне ВС треугольника АВС взята точка М так, что ВМ = 2·СМ. Точки К и L выбраны на сторонах соответственно АС и АВ так, что АК = 2·СК, BL = 3·AL. В каком отношении отрезки KL и AM делятся их точкой пересечения?
14. Докажите с помощью векторов свойства средних линий треугольника и трапеции.
15. Точки S и R делят стороны АВ и ВС треугольника АВС в отношениях AS : SB = 3 : 1, BR : RC = 1 : 2. М – середина отрезка AR. В каком отношении прямая SM делит сторону АС?
16. Решены задачи из Атанасяна №№ 780, 782, 783, 786, 787, 804, 806, 792, 799, 810, 790, 795, 809, 913, 914, 915, 916