

Отношения эквивалентности и комбинаторика

Определение. Пусть M – множество. Произвольное множество $R \subset \{(a,b) \mid a,b \in M\}$ упорядоченных пар элементов из M называется отношением на M . Если $(a,b) \in R$, то пишут $a \sim_R b$ или просто $a \sim b$.

Отношения можно изображать в виде таблицы. Строки и столбцы таблицы занумерованы элементами множества M , на пересечении строки a и столбца b таблицы стоит 1, если $a \sim_R b$, иначе клетка пустая.

Также отношения можно изображать в виде ориентированного графа. Вершинами графа будут элементы множества M . В графе из вершины a ведет ребро в вершину b если $a \sim_R b$.

1. Изобразите в виде графа и таблицы следующие отношения.

а) $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $a \sim_R b$, если $a \equiv b \pmod{2}$

б) $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,15\}$, $a \sim_R b$, если a кратно b (таблицу можно не рисовать)

в) M – множество подмножеств множества $\{0,1,2\}$, $A \sim_R B$, если $A \subset B, A \neq B$.

Определение. Отношение R называется рефлексивным, если $a \sim_R a, \forall a \in M$.

Отношение R называется симметричным, если из $a \sim_R b$ следует, что $b \sim_R a$.

Отношение R называется транзитивным, если из $a \sim_R b$ и $b \sim_R c$ следует $a \sim_R c$.

Отношение R называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно одновременно.

2. а) Какие свойства выполняются для отношений из задачи 1?

б) Что означают свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности для изображения отношения в виде таблицы. Что означает свойство отношения быть эквивалентностью?

в) Что означают эти свойства для изображения в виде графа?

3. Пусть в множестве M n элементов. а) Сколько существует отношений на множестве M ?

б) Сколько из них являются рефлексивными? в) Сколько из них являются симметричными?

4. Являются ли эквивалентностями следующие отношения?

а) Отношение быть братом на множестве людей.

б) Отношение быть параллельным на множестве прямых.

в) Отношение быть перпендикулярным на множестве прямых.

г) Отношение равносторонности на множестве многоугольников. (Два многоугольника называются равносторонными, если один из них можно перекроить в другой (то есть разрезать на части, переложив которые, можно получить другой)).

д) Придумайте свой пример отношения эквивалентности.

Определение. Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности. Для каждого элемента $x \in M$ определим множество $[x] = \{y \in M \mid x \sim y\}$ – класс эквивалентности элемента x . Элемент x при этом называется представителем класса $[x]$.

5. Докажите, что любые два класса эквивалентности или не пересекаются или совпадают.

Докажите, что каждое отношение эквивалентности на M задаёт разбиение множества M на непересекающиеся классы эквивалентности.

Верно, очевидно, и обратное: если произвольное множество разбито на непустые непересекающиеся классы, то отношение «лежать в одном классе» будет отношением эквивалентности. Получается, что разбить множество на непустые классы и задать на нём отношение эквивалентности – это, по сути, одно и то же.

6. Дан граф. Его вершины разбиты на несколько кусков (компоненты связности). Придумайте отношение эквивалентности, которое задает такое разбиение.
7. а) Проведены несколько прямых. Они разбивают плоскость на части. Придумайте отношение эквивалентности на множестве точек плоскости, которое задает это разбиение на части.
б) Проведены несколько прямых и окружностей. Они разбивают плоскость на части. Придумайте отношение эквивалентности на множестве точек плоскости, которое задает это разбиение на части.

Определение Отношение сравнимости по модулю m является отношением эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается \mathbb{Z}_m (другое обозначение $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$).

8. а) Пусть a и m взаимно просты. Рассмотрим отображение $\mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ по правилу: $[x] \mapsto [ax]$. Является ли это отображение инъекцией? Сюръекцией? Биекцией?
б) Пусть m_1 и m_2 взаимно простые числа. Рассмотрим отображение $\mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$ определенное формулой $[x] \mapsto ([x], [x])$. Является ли это отображение инъекцией? Биекцией?

В комбинаторике нередко какие-то ситуации считаются эквивалентными, и требуется подсчитать количество классов эквивалентности.

9. а) В Марсианском языке ровно n букв, а словом является любая последовательность из k различных букв. Но слова отливающиеся только перестановкой букв являются синонимами. Сколько всего слов и сколько разных по смыслу слов в Марсианском языке?
б) То же самое, но буквы в слове не обязательно различные. (хотя бы для $k=5$)
10. Сколькими способами можно раскрасить: а) грани куба в шесть данных цветов?
б) грани правильного тетраэдра в четыре данных цвета?
11. В жезле n полосок, каждую из которых можно покрасить в черный или белый цвет. Если одна раскраска получается из другой переверотом жезла, то они считаются одинаковыми. Сколько существует различных жезлов?
12. В карусели p сидений, где p – простое число. Рассмотрим множество раскрасок этих сидений в n цветов. Понятно, что раскраски получающиеся поворотом карусели считаются одинаковыми. Сколько существует различных раскрасок?
13. То же самое, но число сидений составное, например 4 или 6.
14. На плоскости отмечены вершины правильного p -угольника, где p – простое число.
а) Посчитайте число замкнутых ориентированных ломанных, проходящих по всем вершинам этого p -угольника.
б) Будем считать одинаковыми ломанные, переходящие друг в друга при повороте. Сколько теперь есть различных ломанных?