

Новогодняя олимпиада.

*придумайте какие-нибудь три натуральных числа x, y, z
при которых $28x+30y+31z=365$
Докажите, что $x+y+z=12$.*

1. Дана таблица $n \times n$, заполненная по правилу: во всех клетках первого столбца записаны 1, в клетках второго – 2, ... , в клетках n -го – n . Числа на диагонали, соединяющей левое верхнее число с правым нижним, стерли. Докажите, что суммы чисел по разные стороны от этой диагонали отличаются ровно в два раза.
2. Есть три числа a, b, c такие, что $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2010$ и $a \neq b$. Найдите значение выражения $c^2(a+b)$.
3. Дан треугольник ABC , в котором $AB > BC$. Касательная к его описанной окружности в точке B пересекает прямую AC в точке P . Точка D симметрична точке B относительно точки P , а точка E симметрична точке C относительно прямой BP . Докажите, что четырехугольник $ABED$ – вписанный.
4. Митя услышал, что в заезде, в котором участвуют три лошади, ставки принимаются в отношении: на первую лошадь 1:4 (то есть, если лошадь приходит первой, поставленную на неё сумму возвращают и дают ещё 4 раза по столько, а если не первой, то ставка пропадает), на вторую 1:3 и на третью 1:1. У Мити есть 100 монет. Может ли он так поставить, чтобы выиграть при любом исходе забега?
5. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?
6. Раз в минуту Олег выбирает две соседние клетки квадрата 5×5 и либо прибавляет к стоящим в них числам по единице, либо отнимает от них по единице. Изначально во всех клетках стоят нули. Через некоторое время оказалось, что суммы чисел во всех строках и столбцах равны. Докажите, что Олег потратил на это четное число минут (возможно ноль).
7. Обещано, что тому, кто найдет такие простые числа $p_1, p_2, \dots, p_{2011}$, что $p_1^2 - 1$ делится на p_2 , $p_2^2 - 1$ делится на p_3 , $p_{2011}^2 - 1$ делится на p_1 выдадут мешок яблок. Если ли у кого-то шанс?
8. Закрашиваются клетки бесконечного клетчатого листа. Федя за один ход может покрасить любые две еще неокрашенные клетки в синий цвет. Вася за один ход может закрасить любую одну клетку в красный цвет. Ходят по очереди. Если Феде удастся получить закрашенную в синий цвет полосу из 100 клеток, то он выиграл. Сможет ли Федя выиграть?

Выберите и решите любые три понравившиеся Вам задачи.

