Периодичность.

Определение. Последовательность $a_1, a_2, ..., a_k, ...$ *называется периодической с периодом T, если существует* n_0 *такое, что* $a_n = a_{n+T}$, *для любого* $n \geq n_0$. *Начало последовательности до первого периода называется предпериодом.*

1. *Теорема о периодичности.* Пусть X – конечное множество и $f : X \to X$. Тогда
   а) для любого элемента x из X последовательность $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ периодична;
   б) если f – инъекция, то период начинается с первого члена.

Числовые последовательности

2. Рассмотрим последовательность остатков чисел 2, 4, 8, 16, … при делении на 1001. Докажите, что она будет периодичной.
3. а) Какой остаток дает число 2011^{1543} при делении на 7? б) Какой остаток дает число $2^{3^{1543}}$ при делении на 11?
4. а) Пусть x – дата вашего рождения. Разделите x на 17 в столбик, докажите, что в частном будет периодичная дробь, найдите период. б) Докажите что любое рациональное число P/Q записывается периодической десятичной дробью. Оцените сверху длину периода. в) При каких условиях можно гарантировать отсутствие предпериода?
5. В последовательности 1,9,9,9,…. каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретятся ли дальше в этой последовательности следующие наборы цифр: а) 1,9,9,9? б) 9,0,1,9? в) 2,0,1,1?
6. Пусть F_n – последовательность Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$). Докажите, что в последовательности будет число кратное 2011. Оцените номер этого числа сверху.

Комбинаторика

7. (Задача про Путешественника) а) В стране из каждого города выходят ровно три дороги в другие города. Путешественник выехал из города A и поворачивал все время направо. Докажите, что когда-нибудь он снова попадет в город A.

   б) То же самое, но путешественник сворачивал поочередно то налево, то направо.

   в) То же самое, но путешественник поворачивает по такой программе: два раза направо, три раза налево. Потом снова два раза направо, три раза налево и т. д.
8. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что повторив эту комбинацию еще несколько раз, можно вернуться в исходную ситуацию.
9. По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

10. Будет ли периодической следующая последовательность цифр 1234567891011…?

11. Докажите, что сумма двух периодических числовых последовательностей – периодическая последовательность.

12. Пусть N и M являются периодами некоторой последовательности. а) Докажите, что $N+M$ и $N-M$ также являются периодами этой последовательности. б) Докажите, что НОД(N,M) тоже является периодом этой последовательности.

13. а) Последовательность периодична с периодом 7. В ней оставлены только 1-й, 10-й, 100-й, 1000-й и т.д. члены. Докажите, что полученная последовательность – периодична. б) То же – для последовательности с периодом любой длины.

14. Каждому натуральному $k \le 100$ поставлено в соответствие натуральное $f(k) \le 100$. Построим последовательность: $a_1 = 1$, $a_{k+1} = f(a_k)$. Докажите, что найдется $n \le 100$, для которого $a_n = a_{2n}$.

Граф умножения.

Пусть p – простое число, a – не делится на p. Построим ориентированный граф, вершины которого - это остатки 1, 2, …, p-1; ребра идут из остатка x в остаток ax. Этот граф будем называть <u>графом умножения на a по модулю p</u>.

15. Нарисуйте граф умножения на 5 по модулю 11.

16. (*Четвертое доказательство МТФ*) а) Докажите, что граф умножения всегда распадается на циклы.

    б) Пусть d минимальное натуральное число такое, что $a^d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. (Почему такое d существует?) Докажите, что все циклы имеют длину d.

    в) Докажите, что p-1 делится на d. Выведите из этого МТФ.

    г) Что получится если число p будет составным?

Дополнительные задачи

17. Пусть F_n – последовательность Фибоначчи (F_1=F_2=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}).
    а) Докажите, что если n кратно m, то F_n кратно F_m.
    б) Докажите, что если F_n кратно F_m и F_m>1, то n кратно m.

18. В последовательности u_0, u_1, … натуральных чисел u_0 – произвольно и для $n > 0$ $u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2}, & \text{если } u_n \text{ четно,} \\ u_n + a, & \text{если } u_n \text{ нечетно,} \end{cases}$ где a – заданное нечетное число. Докажите, что последовательность периодична, начиная с некоторого места.

19. В каждой клетке доски 8×8 поставлена стрелка, показывающая в одном из четырех направлений (вверх, вниз, вправо, влево). Фишка стоит в некоторой клетке и идет по стрелке. При этом стрелка в клетке поворачивается на 90° по часовой стрелке. Так она ходит, ходит, ходит. Докажите, что она рано или поздно упадет с доски.