Программа зачета. 1 часть.

Основные понятия. ***Сравнения по модулю. Отношения, свойства отношений, отношения эквивалентности, классы эквивалентности. Отношение сравнимости, множество $\mathbb{Z}_m$. Периодическая последовательность, предпериод.***

1. Сравнения по модулю. Два определения, их эквивалентность.
2. Свойства сравнений: транзитивность, сложение, умножение, возведение в степень.
3. Пусть *a* взаимно просто с *m*. Тогда числа *a, 2a, 3a,…, (m-1)a* дают все ненулевые остатки по модулю *m*.
4. а) *(Деление сравнений)* Пусть *c* не кратно *m*. Приведите пример, когда верно, что $ac \equiv bc \pmod{m}$, но неверное, что $a \equiv b \pmod{m}$?
   б) Докажите, что если *c* и *m* взаимно простые, то из $ac \equiv bc \pmod{m}$ следует, что $a \equiv b \pmod{m}$.
5. Решите сравнения а) $4x \equiv 1 \pmod{11}$ б) $4x \equiv 5 \pmod{12}$ в) $4x \equiv 2 \pmod{10}$
6. Докажите, что если НОД(*a,m*)=*1,* то сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ имеет единственное решение.
7. Малая Теорема Ферма – доказательство через бином.
8. Малая Теорема Ферма – доказательство через произведение остатков.
9. Малая Теорема Ферма – комбинаторное доказательство.
10. Малая Теорема Ферма – доказательство через граф умножения.
11. Найдите остаток деления а) 50^{961} на 97. б) $2^{3^{1543}}$ на 17.
12. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером *n*, возводят номер в квадрат и едут на этаж с номером равным остатку полученного числа по модулю 17. Потом снова возводят в квадрат и т.д. Сколько этажей они могут посетить при таком путешествии?
13. *(Китайская теорема об остатках)* Пусть $m_1, m_2, \dots, m_k$ попарно взаимно простые числа, $m=m_1m_2\dots m_k$,. Тогда для любых $0 \le r_1 < m_1$, $0 \le r_2 < m_2, \dots, 0 \le r_k < m_k$ существует единственное $0 \le r < m$ такое, что $r \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $r \equiv r_2 \pmod{m_2}, \dots$, $r \equiv r_k \pmod{m_k}$
14. Решите системы сравнений а) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$
15. Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел m_1, m_2, m_3 найдутся 3 последовательных числа *a*, *a*+1, *a*+2 таких, что *a* кратно m_1, *a+1* кратно m_2, *a+2* кратно m_3.
16. Рассмотрим линейное диофантово уравнение *ax+by=c.*

а) Если с не делится на НОД(*a,b*), то уравнение не разрешимо в целых числах.

б) Пусть *c* делится на *d*=НОД(*a,b*), $a=da_1$, $b=db_1$. Тогда существует частное решение (x_0,y_0) *и* общее решение равно $\begin{cases} x = x_0 + b_1 k \\ y = y_0 - a_1 k \end{cases}$, где k – произвольное целое число

17. Решите в целых числах уравнения.

а) $13x + 8y=2$ б) $34x-15y=2$ в) $39x+65y=3$ г) $14x-35y=21$

18. Сколько целых точек прямой $6x+7y=101$ лежит внутри первого квадранта.

19. Пусть в множестве M n элементов. а) Сколько существует отношений на множестве M?
б) Сколько их них являются рефлексивными? в) Сколько из них являются симметричными?

20. Классы эквивалентности. Докажите, что каждое отношение эквивалентности на M задаёт разбиение множества M на непересекающиеся классы эквивалентности.

21. Дан граф. Его вершины разбиты на несколько кусков (компоненты связности). Придумайте отношение эквивалентности, которое задает такое разбиение.

22. Проведены несколько прямых. Они разбивают плоскость на части. Придумайте отношение эквивалентности на множестве точек плоскости, которое задает это разбиение на части.

23. а) Пусть a и m взаимно просты. Рассмотрим отображение $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m$ по правилу: $[x] \mapsto [ax]$. Докажите, что оно является биекцией.

    б) Пусть m_1 и m_2 взаимно простые числа, $m=m_1m_2$. Рассмотрим отображение $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$ определенное формулой $[x] \to ([x],[x])$. Докажите, что оно является биекцией.

24. В жезле n полосок, каждую из которых можно покрасить в черный или белый цвет. Если одна раскраска получается из другой переворотом жезла, то они считаются одинаковыми. Сколько существует различных жезлов?

25. *Теорема о периодичности.* Пусть X – конечное множество и $f : X \to X$. Тогда

    а) для любого элемента x из X последовательность $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$ периодична;
    б) если f – инъекция, то период начинается с первого члена.

26. а) Докажите, что последовательность остатков чисел a, a^2, a^3,… при делении на m периодична. б) Докажите, что если a взаимно просто с m, то в этой последовательности нет предпериода.

27. Докажите что любое рациональное число P/Q записывается периодической десятичной дробью.

28. В последовательности 1,9,9,9,…. каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретятся ли дальше в этой последовательности следующие наборы цифр: а) 1,9,9,9? б) 9,0,1,9?

29. Пусть F_n – последовательность Фибоначчи ($F_1=F_2=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$). Докажите, что в последовательности будет число кратное 2011. Докажите, что номер первого такого числа не превышает 2011^2.

30. (Задача про Путешественника) а) В стране из каждого города выходят ровно три дороги в другие города. Путешественник выехал из города A и поворачивал все время направо. Докажите, что когда-нибудь он снова попадет в город A.

    б) То же самое, но путешественник сворачивал поочередно то налево, то направо.

    в) То же самое, но путешественник поворачивает по такой программе: два раза направо, три раза налево. Потом снова два раза направо, три раза налево и т. д.

31. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что повторив эту комбинацию еще несколько раз, можно вернуться в исходную ситуацию.

32. Докажите, что сумма двух периодических числовых последовательностей – периодическая последовательность.

33. Пусть $\underline{N}$ и M являются периодами некоторой последовательности. а) Докажите, что $N+M$ и $N-M$ также являются периодами этой последовательности. б) Докажите, что НОД(N,M) тоже является периодом этой последовательности.

Программа зачета. 2 часть.

<u>Основные понятия:</u> гомотетия, инверсия, бесконечно удаленная точка, пополненная плоскость, угол между окружностями, угол между окружностью и прямой.

34. Докажите свойства гомотетии:
- Гомотетия является биекцией.
- Гомотетия является преобразованием подобия с коэффициентом $|k|$.
- Гомотетия переводит прямую, в параллельную ей прямую.
- Гомотетия сохраняет величины углов.
- Гомотетия переводит окружности в окружности. При этом центр окружности переходит в центр. Касательные к окружности переходят в касательные к окружности.

35. Даны две окружности. Постройте центр гомотетии переводящей одной из них в другую. (Рассмотрите разные случаи расположения окружностей, и центра гомотетии)
36. Дана окружность и точка внутри нее. Постройте хорду, которая делится данной точкой в отношении 1:2.
37. а) Впишите квадрат в данный сектор. б) Каким числом способов это можно сделать.
38. Постройте треугольник по двум углам и периметру.
39. *(прямая Эйлера)* Докажите, что в любом треугольнике центр O описанной окружности, точка пересечения медиан M и точка пересечения высот H лежат на одной прямой, причем $MH=2MO$
40. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C движется по этой окружности. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольника ABC.
41. *(Окружность 9 точек)* Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что следующие 9 точек: середины сторон, основания высот, середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности.
42. Докажите, что при инверсии точки, расположенные на окружности инверсии, остаются на месте, расположенные внутри нее переходят вовне, а расположенные вне круга инверсии переходят во внутренние точки круга. Докажите, что инверсия является биекцией расширенной плоскости.
43. Докажите, что при инверсии

    а) Прямые проходящие через точку O переходят в себя.

    б) Прямые не проходящие через O, переходят в окружности, проходящие через O.

    в) Окружности, проходящие через точку O, переходят в прямые не проходящие через точку O.

    г) Окружности, не проходящие через точку O, переходят в окружности, не проходящие через точку O.
44. Докажите, что при инверсии центр окружности не обязательно переходит в центр образа.
45. Дан квадрат, одна вершина которого совпадает с центром инверсии, а другая лежит на ее окружности. Постройте образ квадрата при инверсии.
46. Дан равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в центре инверсии, а противоположная сторона касается ее окружности. Найдите образ треугольника при инверсии.

47. Докажите, что при инверсии касающиеся окружности переходят или в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых. Тоже для образа касающихся окружности и прямой или пары параллельных прямых.
48. Постройте с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей, имеющих общую точку.
49. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности
50. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.
51. Докажите, что угол между пересекающимися окружностями (или окружностью и прямой) не зависит от выбора точки пересечения.
52. Угол между двумя линиями (окружностями или прямыми) равен углу между их образами при инверсии.
53. Даны две окружности S *и* T . Докажите, что следующие условие эквивалентны

а) Окружности S и T ортогональны.

б) При инверсии относительно S окружность T переходит в себя.

в) Окружность T проходит через пару точек, инверсных относительно S.

54. На окружности w выбраны точки A и B. Рассматриваются всевозможные пары касающихся окружностей w_1 и w_2, лежащих внутри w, таких, что w_1 касается w в точке A, а w_2 касается w в точке B. Найдите множество точек касания окружностей w_1 и w_2.
55. Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке A, вторая третьей – в точке B, третья четвёртой – в точке C, а четвёртая первой – в точке D. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
56. а) Докажите, что расстояния между точками A и B и их образами A_1 и B_1 при инверсии с центром O и радиусом R связаны соотношением $A_1B_1 = \dfrac{R^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$

    б) (Теорема Птолемея.) Докажите, что во вписанном четырехугольнике сумма произведений противолежащих сторон равна произведению диагоналей.
57. (Теорема Фейербаха). Докажите, что окружность 9 точек касается вписанной и всех трех вневписанных окружностей.