Гимназия 1543, 9-В класс *Листик 16.4, 19 марта 2011.*

Метод Штурма.

1. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

2. У Феди было два положительных числа a и b. Феде удалось «сблизить» свои числа, то есть обменять их на такие числа a_1 и b_1, что сумма чисел не изменилась, а модуль разности уменьшился. Увеличатся или уменьшатся значения следующих выражений?

ab	$a^2 + b^2$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	$a^4 + b^4$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

4. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

5. Докажите неравенство между средним геометрическим и средним гармоническим.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

6. Сумма положительных чисел a_1, a_2, …, a_n равна 1. Докажите, что

$$(1+a_1)\cdot(2+a_2)\cdot\ldots\cdot(n+a_n) \leq 2n!$$

Задачи из прошлых листиков.

7. *(Варьирование 2.6)* а) Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a}+\sqrt{1+4b}+\sqrt{1+4c}+\sqrt{1+4c} \leq 4\sqrt{2}$$

б) Подумайте над обобщением

8. *(Варьирование 1.8)* Докажите, что среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.