Неравенства. Применения неравенств между средними.

❖ *(Неравенства между средними)* Для произвольных положительных чисел a_1, a_2, ... a_n выполняется неравенство: $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$

Равенство достигается, только если $a_1 = a_2 = ... = a_n$

Все числа в этом листике неотрицательные. Во всех неравенствах надо найти случай равенства.

1. Докажите неравенство $\frac{x^4}{y}+\frac{y^4}{z}+\frac{z^4}{x} \geq 3xyz$.
2. Докажите неравенство $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+x^3) \geq 27x^2y^2z^2$.
3. Докажите неравенство $\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2+\left(\frac{b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geq 27$.
4. Найдите минимальное значение выражения $x+2y+\frac{4}{xy}$. При каких значениях x,y оно достигается?
5. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$.
6. *а)* Докажите неравенство $\frac{2x+y}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y}$.

б) (Неравенство Коши с весами). Для натуральных чисел m_1, m_2, ..., m_k с суммой m докажите неравенство $\frac{m_1a_1+m_2a_2+..+m_na_n}{m} \geq \sqrt[m]{a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_n^{m_n}}$.

в) Тоже самое для рациональных m_1, m_2, ..., m_k..

7. а) Найдите минимальное значение выражения $5x^4+\frac{4}{x^5}$. При каком значении x оно достигается?

   б) Найдите минимальное значение выражения $x+y+\frac{27}{x^3y}$. При каком значении x, y оно достигается?

8. Докажите неравенство
$\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$.
9. Докажите, неравенство $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.