

Бесконечность.

От противного («предположим, что конечное...»)

1. Верно ли, что в десятичной записи $\sqrt{2}$
 - а) какая-то ненулевая цифра встречается бесконечно много раз.
 - б) какой-то набор из 100 подряд идущих цифр повторяется бесконечно много раз.
2. а) В горах живут три бесконечнодолгожителя. Каждый день каждый из них посвящает либо сну, либо еде. Докажите, что занятия каких-то двух из них совпадут бесконечно много раз.
б) Докажите, что из любых 11 бесконечных десятичных дробей можно выбрать две, совпадающие в бесконечном числе позиций.
3. Для любого n сумма n первых членов последовательности больше n . Докажите, что в последовательности бесконечно много положительных членов.
4. Верно ли, что в любой бесконечной десятичной дроби можно так переставить цифры, что полученная дробь станет а) периодической с предпериодом б) периодической без предпериода?

Покрытия бесконечного.

5. Можно ли покрыть прямую конечным числом кругов?
6. Дано несколько геометрических прогрессий, состоящих из натуральных чисел. Докажите, что найдётся натуральное число, не входящее ни в одну из них.
7. Можно ли покрыть плоскость а) конечным числом полос; б) конечным числом внутренностей углов, сумма которых меньше 360° ; в)* конечным числом внутренностей парабол?

Еще задача

8. Круг разделен на 1000 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе где фишка, фишка сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа станут больше миллиона.