Домашнее задание

1. Найдите значение выражения а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$; б) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-1}$; в) $\dfrac{4\operatorname{tg}0-2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$.
2. Найдите: а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-0,75$ и $\pi<\alpha<2\pi$.
3. Найдите $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=a$.
4. Известно, что $\sin^2\alpha\cos^2\alpha=a$. Найдите $\dfrac{\sin^{10}\alpha}{1-\operatorname{tg}^4\alpha}+\dfrac{\cos^{10}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^4\alpha}$.
5. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $1-\sqrt{\cos^2\alpha}-2\sin^2\alpha$.
6. Постройте график функции $y=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

   А также из учебника Виленкина №№ 511 (3, 13) и 536 (3)

Периодические функции

Определение. Число T называется ***периодом*** функции $f(x)$, если для любого x из области определения $f(x)$ выполняются равенства
$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

7. Всякая ли функция имеет период?

   Определение. Функция, имеющая ненулевой период, называется ***периодической***.
8. Что можно сказать о функции, периодами которой являются все числа?

   Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет периоды T_1 и T_2, Тогда ее периодами также являются числа: $-T_1$; T_1+T_2; nT_1; nT_1+kT_2, где n,k — произвольные целые числа.
9. Найдите наименьший положительный период функции: а) $f(x)=\{x\}$; б) $f(x)=\{3x\}$.
10. а) Обязательно ли среди положительных периодов периодической функции найдется наименьший?
    б) Существует ли такая функция, что любое рациональное число является ее периодом, а любое иррациональное — нет?
    в)* Существует ли такая функция, что любое иррациональное число является ее периодом, а любое рациональное — нет?
11. Докажите, что если T — наименьший положительный период функции, то все остальные периоды кратны T.

    Определение. Наименьший положительный период функции называется ее ***основным*** периодом.
12. Найдите основной период функции: а) $f(x)=\{2x\}$; б) $f(x)=\{2x\}+1$; в) $f(x)=\{2x+1\}$.
13. Пусть функция $y=f(x)$ — периодическая, и ее основной период равен T.
    а) Докажите, что функция $f(kx+b)$ тоже периодическая и найдите ее основной период.
    б) Обязательно ли будут периодическими функции $y=f(|x|)$ и $y=|f(x)|$? Если да, то можно ли указать основной период?
14. Найдите основной период функции: а) $f(x)=\left\{\frac{x}{3}\right\}+3\left\{\frac{x}{5}\right\}$; б) $f(x)=\{3x\}+8\{5x\}$.

    Теорема. Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ периодические. Основной период функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ равен 2π, а функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ — π.
15. Найдите основной период функции: а) $f(x)=\sqrt{1+\{4x\}}$; б) $f(x)=\sin 3x+2\operatorname{tg}5x$;
    в) $f(x)=\sqrt{\sin\frac{4}{5}x+3\operatorname{tg}\frac{7}{8}x+\cos 5x}$.
16. Является ли периодической функция: а) $f(x)=\{x^2\}$; б) $f(x)=\{x\}+\{x\sqrt{2}\}$?
17. * Может ли функция $f(x)$ иметь основной период 2, функция $g(x)$ — 6, а функция $f(x)+g(x)$ — 3?
18. * № 517 (7,8) из учебника Виленкина

Домашнее задание

19. Докажите неравенства: а) $\sin^8\alpha+\cos^8\alpha\geq 0,125$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\geq 6$.
20. Определите, является ли функция периодической. Если нет, то докажите это. Если да, то найдите наименьший положительный период.
    а) $y=\cos\sqrt{x}$; б) $y=\cos\sqrt{|x|}$; в) $y=\sqrt{\cos x}$; г) $y=\sqrt{|\cos x|}$.

    №№ 515 (3,4), 517 (4,5), 519, 520, 521, 553(4,5), 555(1,2) из учебника Виленкина

Графики тригонометрических функций

Исследуем каждую из тригонометрических функций по стандартному плану:

1) область определения и область значений функции

2) четность (нечетность)

3) периодичность (с указанием основного периода)

Благодаря (не)четности, периодичности и формулам $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ достаточно построить график каждой тригонометрической функции на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$, а затем продолжить на всю ось. А для этого определить, возрастает или убывает функция на указанном отрезке и отметить контрольные точки.

4) нули функции

5) интервалы знакопостоянства

6) промежутки монотонности

7) наличие асимптот

График функции $y=\sin x$ называется ***синусоидой***, а график функции $y=\operatorname{tg}x$ — ***тангенсоидой***.

21. Докажите, что как геометрическая фигура график функции: а) $y=\cos x$ равен синусоиде; б) $y=\operatorname{ctg}x$ равен тангенсоиде.
22. Постройте график функции (уравнения): а) $y=1-\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})$; б) $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; в) $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-|x|\right)$; г) $y=2\sin\left|\frac{\pi}{6}-x\right|$; д) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; е) $|y|=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$; ж) $y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}\right)$.
23. Определите знак разности: а) $\operatorname{ctg}\left(7\frac{3}{14}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(9\frac{8}{27}\pi\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(7\frac{3}{14}\pi\right)-\operatorname{ctg}\left(9\frac{8}{27}\pi\right)$.

Домашнее задание

24. Постройте график функции: а) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$; б) $y=\left|1-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; в) $y=\cos\left(|2x|-\frac{2\pi}{3}\right)$; $y=\operatorname{ctg}\left|\frac{\pi}{6}-x\right|$.
25. Сравните числа: а) $\cos\frac{19\pi}{9}$ и $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; б) $\sin\frac{17\pi}{5}$ и $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$; в) $\sin 7$ и $\cos 7$.
26. * Возьмите цилиндр (например, свечу или сосиску), намотайте на него лист бумаги в несколько слоев и аккуратно разрежьте все это острым ножом наискосок. Разверните бумагу. Докажите, что линия разреза является синусоидой.

Обратные тригонометрические функции

27. Обратимы ли тригонометрические функции? Как можно уменьшить область определения каждой из них, чтобы функция стала обратимой?

Определение 1. Пусть $-1\le y\le 1$. Тогда ***арксинусом*** y называется такое число x, что $\sin x=y$ и $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$. Запись: $x=\arcsin y$.

Определение 2. Пусть $-1\le y\le 1$. Тогда ***арккосинусом*** y называется такое число x, что $\cos x=y$ и $0\le x\le\pi$. Запись: $x=\arccos y$.

Определение 3. ***Арктангенсом*** y называется такое число x, что $\operatorname{tg}x=y$ и $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Запись: $x=\operatorname{arctg}y$.

Определение 4. ***Арккотангенсом*** y называется такое число x, что $\operatorname{ctg}x=y$ и $0<x<\pi$. Запись: $x=\operatorname{arcctg}y$.

28. Постройте графики функций $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg}x$ и $y=\operatorname{arcctg}x$. Укажите область определения и область значений каждой функции.
29. Вычислите: а) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; в) $\operatorname{arctg}0$; г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}})$.
30. При каких t верно равенство: а) $\cos(\arccos t)=t$; б) $\arccos(\cos t)=t$; в) $\sin(\arcsin t)=t$; г) $\arcsin(\sin t)=t$?
31. При каких значениях x верно равенство $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$?
32. Докажите тождество: а) $\operatorname{tg}(|\operatorname{arctg}x|)=|x|$; б) $\operatorname{ctg}(|\operatorname{arcctg}x|)=x$; в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{x}$ при $x\ne 0$.
33. Вычислите: а) $\arcsin(\sin 10)$; б) $\arccos(\cos 5)$.
34. Докажите тождества: а) $\arcsin(-a)=-\arcsin a$; б) $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$; в) $\operatorname{arctg}(-a)=-\operatorname{arctg}a$; г) $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg}a$.
35. Вычислите: а) $\cos(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $\cos(\arcsin\frac{1}{3})$; в) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$; г) $\sin(\arccos(\frac{3}{5}))$.
36. Докажите, что: а) если $0\le x\le 1$, то $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$; б) если $0\le x<1$, то $\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
37. Докажите тождество: а)$\sin(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
38. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\arccos 1-2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; г) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{2}{5}\right)$; ж) $\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

б) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{3}}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; д) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arctg}7\right)$; з) $\sin(\operatorname{arctg}0,25)$;

в) $\cos\left(\pi+\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}(-5)\right)$; и) $\operatorname{tg}(\arccos 13)$.