

Число e

31. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает.

Указание. Примените неравенство Коши к $n + 1$ числу: 1 и n раз по $1 + \frac{1}{n}$.

32. Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Определение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

33. Докажите корректность определения числа e .

34. * Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает.

35. * Докажите, что последовательности x_n и y_n сходятся к одному и тому же пределу, причем для любого $n \in \mathbb{N}$ $x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y_n$

36. * Докажите, что:

а) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$; б) $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

в) $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$.

37. Оцените число e .

38. Вычислите пределы последовательностей: а) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$; б) $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$; в) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;
г) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$; д) $\left(\frac{5n+6}{1+5n}\right)^{\frac{n}{2}}$; е) $\left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-3}\right)^n$; ж) $\left(\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}\right)^n$; з) $n^{-\frac{1}{n}}$.

Домашнее задание

39. Докажите, что последовательность $\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)$ бесконечно мала.

40. Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n}$ сходится.

41. Последовательность задана рекуррентным соотношением: а) $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$, $a_1 = \sqrt{3}$;
б) $a_n = a_{n-1} - a_{n-1}^2$, $a_1 = \frac{1}{2}$. Докажите, что она имеет предел, и найдите его.

42. Найдите предел последовательности a_n , если $a_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{27}{a_n^2}\right)$, $a_1 = 1$

43. Вычислите $\sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

44. Вычислите методом последовательных приближений а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{5}$ с точностью до сотых.

45. Вычислите: а) $\sum_{n=0}^{\infty} (0,6)^n$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

46. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если $x_n = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1}$.

47. Вычислите пределы последовательностей: а) $\left(\frac{n+2}{n-1}\right)^n$; б) $\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{\frac{n}{2}}$; в) $\left(1 + \frac{7}{2n+3}\right)^n$;
г) $\left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$; д) $\left(\frac{n^2+2n-1}{2n^2-3n-2}\right)^{\frac{1}{n}}$.