Предел функции

Предел функции на бесконечности

1. Найдите предел последовательности $(a_n) = \dfrac{2n+4}{n}$. Что это означает в соответствии с определением предела последовательности?

2. а) Постройте график функции $f(x) = \dfrac{2x+4}{x}$. Назовите число, близкое к значениям функции при больших значениях аргумента.
б) Укажите такое число M_1, что при всех $x > M_1$ выполняется неравенство $|f(x) - 2| < 0{,}1$.
в) Укажите такое число M_2, что при всех $x > M_2$ выполняется неравенство $|f(x) - 2| < 0{,}001$.
г) Докажите, что $(\forall\varepsilon > 0)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x) - 2| < \varepsilon)$.

Определение. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x) - b| < \varepsilon).$$

Пишут: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

3. Сформулируйте определения предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to \infty$.

4. Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при $x \to +\infty$.

Два определения предела функции в точке

Определение. ***Проколотой ε-окрестностью*** точки a называется объединение интервалов $(a - \varepsilon;\ a) \cup (a;\ a + \varepsilon)$.

Если во всех точках какой-нибудь проколотой ε-окрестности точки a выполняется некоторое свойство функции, то говорят, что это свойство выполняется ***вблизи*** точки a.

5. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.
а) Определите знак функции $f(x)$ вблизи точки 2. Означает ли это, что $f(2) > 0$?
б) Найдите с точностью до $0{,}000001$, чему равно значение $f(x)$ вблизи точки 2. Означает ли это, что $f(2) = 4$?

В подобной ситуации говорят, что $f(x) \to 4$ при $x \to 2$, и пишут $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 4$.

Определение 1. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2. Число b называется ***пределом функции $f(x)$ в точке a***, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что если x находится в ней, то $f(x)$ находится в ε-окрестности точки b.

Определение 3. Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon))((0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - b| < \varepsilon)).$$

Ясно, что все три определения на самом деле разные формы одного и того же. Его называют определением ***по Коши***.

6. Докажите, что: а) $\lim\limits_{x\to3}(2x - 1) = 5$; б) $\lim\limits_{x\to0}\sin x = 0$; в) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x} = 2$; г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5}$.

7. Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим множество сходящихся к $a = 3$ последовательностей (x_n), члены которых принадлежат области определения $f(x)$. Верно ли, что все соответствующие им последовательности $f(x_n)$ сходятся?
а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $f(x) = [x]$; в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 3}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$.

8. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для любой сходящейся к a последовательности (x_n), члены которой принадлежат области определения $f(x)$ и отличны от a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b.

9. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Две последние задачи доказывают корректность *второго определения предела функции в точке*, предложенного немецким математиком *Генрихом Гейне*:

Определение предела функции по Гейне. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, если для любой сходящейся к a последовательности (x_n), члены которой принадлежат области определения $f(x)$ и отличны от a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b.

10. Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим множество сходящихся к a последовательностей (x_n), члены которых принадлежат области определения $f(x)$. Докажите, что если все соответствующие им последовательности $f(x_n)$ сходятся, то они сходятся к одному и тому же пределу.
11. Докажите, что функция не может иметь двух различных пределов при $x\to a$, пользуясь определением: а) по Коши; б) по Гейне.
12. Дайте определение предела функции на бесконечности по Гейне.

Теорема о предельном переходе. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, и существует проколотая окрестность точки a, в которой выполнено неравенство $f(x)\leqslant g(x)$, то $A\leqslant B$.

Теорема "о двух милиционерах". Если существует проколотая окрестность точки a, в которой выполнено неравенство $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$, и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен b.

Арифметические свойства пределов.

Теорема. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$. Тогда:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=a+b$. (*предел суммы равен сумме пределов*)
2) $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=ab$. (*предел произведения равен произведению пределов*)
3) если $b\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$. (*предел частного равен частному пределов*)
4) $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. (*постоянный множитель можно выносить за знак предела*)

13. Сформулируйте и докажите арифметические свойства предела функции на бесконечности.
14. Верно ли равенство: $\lim\limits_{x\to\frac12}[2x]=2\lim\limits_{x\to\frac12}[x]$? Почему? Не противоречит ли этот пример тому, что постоянный множитель можно выносить за знак предела?
15. а) Докажите, что предел многочлена в точке a равен его значению в этой точке.

    б) Найдите $\lim\limits_{x\to-2}(3x^4+5x^2-12)$.
16. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4+4x^3+1}{(x-1)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$;

    г) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, где $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$.
17. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+4x-6}{2x^3-8x^2+12x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+4x+10}{2x^4-5x}$;

    в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^2)^{10}}{(1+2x^{10})^2}$; д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+3x^{11})^3}{(1+8x^5)^7}$.

Домашнее задание

18. Докажите, пользуясь только определением по Коши, что:

    а) $\lim\limits_{x\to-3}x^2=9$; б) $\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x-3)=5$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac15$; г) $\lim\limits_{x\to1}(x^3+3)=4$.
19. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to2}(x^4-3x^2+2x-4)$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5+2x+x^2}{x^3+3x^2+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^3+2x^2}$;

    г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)}-\dfrac{2}{x-2}\right)$.
20. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x-6}{x^3+15x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+4x+10}{x^4-5}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x}-x)$;

    г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+4})$.