Непрерывность функции

Односторонние пределы

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a-c;\, a)$ для некоторого положительного c. Тогда число b называется ***пределом слева*** функции $f(x)$ в точке a и обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, если $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon))((a-\delta<x<a)\Rightarrow(|f(x)-b|<\varepsilon))$.

21. Дайте определение предела функции справа.
22. Докажите, что функция имеет предел в точке a тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке пределы как слева, так и справа, причем эти пределы совпадают.
23. Изобразите графики функций, которые бы в точке $x_0=2$:
    а) имели бы предел слева, но не имели бы предела справа;
    б) имели бы разные пределы слева и справа.

О пределе монотонной функции

24. Докажите, что *если функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) на луче $(a;\,+\infty)$, то существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.*
25. Верно ли, что если функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) на интервале $(a;\,b)$, то она имеет предел в каждой точке этого интервала?
26. Пусть функция $f(x)$ не убывает и ограничена сверху на интервале $(a;\,b)$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.
27. Сформулируйте аналогичную теорему для невозрастающей функции.
28. Докажите, что *функция, монотонная на интервале $(a;\,b)$, имеет в каждой точке этого интервала предел как слева, так и справа.*

Определение непрерывной функции

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке x_0***, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Критерий непрерывности. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции (т.е. $\lim\limits_{x-x_0\to 0}(f(x)-f(x_0))=0$)

29. Сформулируйте определение непрерывной функции на языке "$\varepsilon-\delta$" и сделайте соответствующий чертеж.
30. Дайте определение непрерывной функции по Гейне.
31. Сформулируйте определение функции, непрерывной слева (справа).

Определение. Функция называется ***непрерывной на множестве***, если она непрерывна в каждой точке этого множества. (Непрерывность в конце отрезка предполагается односторонней)

Ранее было показано, что многочлен непрерывен на $\mathbb{R}$, а рациональная функция — на всей области определения. Вот более общее утверждение:

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда в этой точке непрерывны и функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $(f(x))^n$, где $n\in\mathbb{N}$. Если $g(x)\neq 0$, то непрерывна и функция $\frac{f(x)}{g(x)}$.

32. Докажите, что функция: а) $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$; б) $\boldsymbol{f(x)=|x|}$ непрерывна на всей области определения.

Точки разрыва

Определение. Пусть функция $\boldsymbol{f(x)}$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $\boldsymbol{x_0}$ и не является в точке $\boldsymbol{x_0}$ непрерывной. Тогда точка $\boldsymbol{x_0}$ называется ***точкой разрыва*** функции $\boldsymbol{f(x)}$.

33. Сформулируйте определение точки разрыва на языке "$\boldsymbol{\varepsilon-\delta}$".

Классификация точек разрыва. Пусть $\boldsymbol{x_0}$ является точкой разрыва функции $\boldsymbol{f(x)}$. Если в точке $\boldsymbol{x_0}$ существуют конечные пределы функции $\boldsymbol{f(x)}$ как слева, так и справа, то $\boldsymbol{x_0}$ называется точкой разрыва ***первого рода***, в противном случае — ***второго рода***.

Разрыв первого рода называется ***устранимым***, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. При этом $\boldsymbol{f(x)}$ может либо отличаться от этих пределов, либо вообще не существовать.

Неустранимый разрыв первого рода называется ***конечным скачком***. В этом случае конечные пределы функции $\boldsymbol{f(x)}$ слева и справа существуют, но не равны друг другу.

Точка разрыва второго рода называется ***полюсом***, если оба односторонних предела в ней равны $\pm\infty$ и ***существенно особой точкой*** в противном случае.

34. Приведите примеры функций, имеющих описанные виды разрыва.

Примеры непрерывных и разрывных функций

35. Исследуйте на непрерывность следующие функции: а) $\boldsymbol{y=[x]}$; б) $\boldsymbol{y=\{x\}}$; в) $\boldsymbol{y=\frac{[x]}{\{x\}}}$; г) $\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$ при $\boldsymbol{|x|>1}$ и $\boldsymbol{y=x^2}$ при $\boldsymbol{|x|\leqslant 1}$.

Определение. Композиция двух функций $\boldsymbol{f(x)=g(\varphi(x))}$ называется ***сложной функцией***.

36. Пусть $\boldsymbol{f(x)=\cos x}$; $\boldsymbol{g(x)=2x-3}$; $\boldsymbol{\varphi(x)=\sqrt{x}}$.
а) Задайте формулой функции $\boldsymbol{g(\varphi(x))}$; $\boldsymbol{\varphi(f(g(x)))}$.
б) Запишите в виде композиции функции $\boldsymbol{\cos\sqrt{x}}$; $\boldsymbol{2\sqrt{\cos x}-3}$.

37. Верно ли равенство: а) $\lim\limits_{x\to\frac12}|2x|=|\lim\limits_{x\to\frac12}2x|$; б) $\lim\limits_{x\to\frac12}[2x]=[\lim\limits_{x\to\frac12}2x]$?

Лемма. Пусть $\boldsymbol{f(x)=g(\varphi(x))}$ — сложная функция, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$, а $\boldsymbol{g(x)}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{b}$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} g(\varphi(x))=g(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x))$. (*Знак непрерывной функции и знак предела можно менять местами*)

Теорема о непрерывности сложной функции. Пусть функция $\boldsymbol{\varphi(x)}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x_0}$, а функция $\boldsymbol{g(x)}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{\varphi(x_0)}$. Тогда сложная функция $\boldsymbol{g(\varphi(x))}$ непрерывна в точке $\boldsymbol{x_0}$.

38. Вычислите пределы: а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-x+7}-4}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{\frac{1-|x|}{x+1}}$.

39. Пусть функции $\boldsymbol{g(x)}$ и $\boldsymbol{\varphi(x)}$ определены на $\mathbb{R}$, причем $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$, а $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$. Верно ли, что если композиция $\boldsymbol{g(\varphi(x))}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}g(\varphi(x))=c$?

40. ***Функция Дирихле.*** $\boldsymbol{D(x)=1}$ для $\boldsymbol{x}\in\mathbb{Q}$, и $\boldsymbol{D(x)=0}$ для $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Исследуйте функцию Дирихле на непрерывность. Какого рода у нее разрывы?

41. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и:
а) разрывной только в одной точке;
б) разрывной в каждой точке;
в) непрерывной ровно в одной точке;
г) непрерывной ровно в двух точках.

42. Приведите пример функции, определенной на $\boldsymbol{R}$ и: а) разрывной в целых точках и непрерывной в остальных; б) непрерывной в целых точках и разрывной в остальных.