

## Бесконечно большие и бесконечно малые функции

*Определение.* Функция  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

43. Сформулируйте определение функции, бесконечно малой на бесконечности.
44. Докажите, что произведение бесконечно малой при  $x \rightarrow a$  и ограниченной вблизи точки  $a$  функций — бесконечно малая в точке  $a$  функция.
45. Рассмотрим произведение бесконечно малой при  $x \rightarrow +\infty$  и ограниченной на  $\mathbb{R}$  функций. Обязательно ли полученная функция: а) бесконечно малая при  $x \rightarrow +\infty$ ; б) ограниченная на  $\mathbb{R}$ ?
46. Что можно сказать о сумме бесконечно малых (в точке или на бесконечности) функций? А о разности? О произведении? О частном?
47. Произведение двух функций бесконечно мало. Обязательно ли одна из них бесконечно мала?  
*Определение.* Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой* при  $x \rightarrow +\infty$ , если  $(\forall N)(\exists M)(\forall x > M)(|f(x)| > N)$ . Пишут  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ .
48. Сформулируйте определение функции, бесконечно большой в данной точке.
49. Докажите, что функция  $f(x)$  является бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$  (или в данной точке) тогда и только тогда, когда функция  $\frac{1}{f(x)}$  бесконечно мала при  $x \rightarrow +\infty$  (или в данной точке).
50. Объясните, что означает  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
51. Что можно сказать о пределе суммы:  
 а) двух бесконечно больших функций;  
 б) бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный предел?
52. Что можно сказать о пределе произведения:  
 а) двух бесконечно больших функций;  
 б) бесконечно большой функции и функции, имеющей конечный ненулевой предел;  
 в) бесконечно большой и бесконечно малой функций?
53. Докажите, что многочлен ненулевой степени — бесконечно большая на бесконечности функция.
54. Что можно сказать о пределе при  $x \rightarrow \infty$  рациональной функции (частного двух многочленов) в зависимости от степеней числителя и знаменателя?
55. Какие из следующих функций бесконечно малы при  $x \rightarrow +\infty$  и почему:  
 а)  $\frac{x^3}{x^4 + 1}$ ; б)  $\frac{x}{10^{300}}$ ; в)  $\frac{10^{300}}{x}$ ; г)  $\frac{2^{[x]} + 3^{[x]}}{6^{[x]}}$ ?
56. Найдите предел а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{4}{3}} - 2}{5x + 3\sqrt{x}}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})$ .