Непрерывность тригонометрических функций

57. Докажите, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Указание. Отметим на координатном круге точки P_0 и P_x. Проведем перпендикуляр к оси абсцисс P_xB и касательную P_xA до пересечения с осью абсцисс. Сравним длину дуги P_0P_x с длинами отрезков P_xB и P_xB.

58. Докажите, что $|\sin x| \leqslant |x|$ для всех действительных x, причем равенство достигается только в нуле.

59. Докажите, что непрерывна на всей числовой оси функция: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$.

60. Исследуйте на непрерывность функции: а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

.

61. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

62. Сделав подходящую замену, вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

Домашнее задание

63. Исследуйте на непрерывность функцию $y = \sin\frac{1}{x}$.

64. Существует ли: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})$?

65. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg} 3x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin a}{x-a}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x - 1}$;
д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x + \sin 7x}{\cos 4x - \cos 6x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{ctg}\pi x$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$; з) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

Порядок малости

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x) = 0$.

Тогда если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то говорят, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая высшего порядка, чем $\beta(x)$ (а $\beta(x)$ — бесконечно малая низшего порядка, чем $\alpha(x)$).

Обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (читается "о малое").

Если же $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \mathrm{c}$, где $c \neq 0$ то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые одного порядка малости. Обозначение: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ (читается "о большое").
В частности, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны.

66. Сравните по порядку малости при $x\to 0$ функции: x, x^2, $5x^2$, x^3, x^3-3x^2, $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $x\sin x$.