

## Избранные задачи с зачета

67. Исследуйте на непрерывность функцию  $y = x \sin \frac{1}{x}$ .
68. Пусть  $g(x) = x^3$ . Существует ли такая последовательность  $x_n \rightarrow 0$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = \frac{1}{1543}$ ?
69. Пусть  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .  
Существует ли такая последовательность  $x_n \rightarrow 0$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{1543}$ ?
70. Ограничена ли функция  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  в окрестности точки  $0$ ? Является ли эта функция бесконечно большой в точке  $0$ ?
71. (на 5+) Придумайте функцию, определенную на всей числовой оси, и имеющую предел только в точках вида  $\frac{1}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

## Показательная функция

## Определение и свойства

Будем считать известными свойства степени с рациональным показателем.

*Определение степени с действительным показателем.* Пусть  $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим  $r_n$  — последовательность рациональных чисел, сходящихся к  $x$ . Тогда  $a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ .

Для проверки корректности этого определения надо убедиться, что указанный предел существует и не зависит от выбора последовательности.

*Определение.* Пусть  $a > 0$ . Функция  $y = a^x$ , определенная для всех  $x \in \mathbb{R}$ , называется *показательной*.

Согласно определению степени с действительным показателем,  $1^x = 1$  для всех действительных  $x$ . Поэтому рассматривать показательную функцию при  $a = 1$  незачем.

*Свойства показательной функции:*

- 1) При  $a > 1$  функция  $y = a^x$  возрастает, а при  $0 < a < 1$  — убывает на  $\mathbb{R}$ .
- 2)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ .
- 3)  $(a^x)^y = a^{xy}$ .
- 4) Функция  $y = a^x$  непрерывна в каждой точке числовой оси.
- 5) Областью значений показательной функции является множество всех положительных чисел.

72. Постройте график функции: а)  $y = 2^x$ ; б)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

73. Сравните числа: а)  $(\sqrt{2})^{-0,3}$  и  $(\sqrt{2})^{-0,2}$ ; б)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^\pi$  и  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^e$ .

74. Постройте график функции: а)  $y = 2^{1-x}$ ; б)  $y = -2^{|x|}$ ; в)  $y = 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}}$ .

75. Как по графику функции  $y = c \cdot a^x$  определить основание  $a$  и коэффициент  $c$ ?

## Второй замечательный предел

*Второй замечательный предел.*  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

76. Вычислите пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$ .