Производная-1

Определения и примеры

Определение 1. Пусть $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x - x_0$ называют ***приращением аргумента****, а $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ —* ***приращением функции****.*

Пример 1. Пусть приращение аргумента равно Δx. Найдите приращение функции $f(x) = x^2$ в данной точке x_0, если:
а) $x_0 = 1$;
б) $x_0 = 2$.
в) В какой из этих точек функция растет быстрее?
г) Запишите приращение функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 в общем виде.

Определение 2. Пусть материальная точка движется прямолинейно и ее координата зависит от времени по закону $s = s(t)$. Тогда
$v_{\text{ср.}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ называется ***средней скоростью*** *точки, а*
$v_{\text{мгнв.}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ — ее ***мгновенной скоростью*** *в момент времени t_0.*

Пример 2. Точка движется по оси Ox, ее координата изменяется со временем по закону $x = t^2$, где t— время в секундах, а единичный отрезок равен 1м.
а) Найдите среднюю скорость точки в течение первой секунды; в течение второй секунды.
б) Найдите мгновенную скорость точки через 1 секунду после начала движения; через 2 секунды.

Определение 3. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Выберем на нем две точки: $M(x_0; f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Тогда прямая MM_1 называется ***секущей****, а ее предельное положение при $\Delta x \to 0$ —* ***касательной*** *к графику в точке x_0.*

Пример 3. Определите угловой коэффициент:
а) секущей к графику функции $f(x) = x^2$, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$;
б) касательных к этому графику в точках $x_0 = 1$ и $x_0 = 1$.
в) Напишите уравнения этих касательных.

Определение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется ***производной*** *функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.*
Функция, имеющая конечную производную в точке x_0, называется ***дифференцируемой*** *в этой точке.*

При существовании только односторонних пределов говорят соответственно о производной слева или справа.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой на множестве****, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. Функция, равная $f'(x)$ в любой точке этого множества, называется производной функции f.*

Правила дифференцирования. Дифференцирование рациональных функций и корней.

1. Найдите по определению производные следующих функций:

   а) $y = C$; б) $y = x$; в) $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$; г) $y = \dfrac{1}{x}$; д) $y = \sqrt{x}$; е) $y = \sqrt[3]{x}$.

Теорема (правила дифференцирования). Пусть функции u и v дифференцируемы на множестве M. Тогда:
функция Cu дифференцируема на M, причем $(Cu)' = Cu'$;
функция $u + v$ дифференцируема на M, причем $(u + v)' = u' + v'$;
функция uv дифференцируема на M, причем $(uv)' = u'v + uv'$;
если $v(x) \neq 0$ при всех $x \in M$, то функция $\dfrac{u}{v}$ дифференцируема на M, причем $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

2. Найдите производные следующих функций:

   а) $y = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2x - 4$; б) $y = \dfrac{x-3}{2x+5}$; в) $y = \dfrac{2x^2 + 15x + 7}{x+8}$.

3. Найдите производную функции $y = (\sqrt{x} + 2)\left(3x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$ в точке $x_0 = 1$.

4. Продифференцируйте функцию $y = (x^2 - 3x + 1)(2x - 4)$ двумя способами. Когда удобнее раскрывать скобки: до или после дифференцирования?

5. а) Докажите, что функция, дифференцируемая в данной точке, непрерывна в ней.
б) Верно ли обратное?

6. В каких точках непрерывны и в каких дифференцируемы следующие функции:
а) $y = |x|$; б) $y = \mathrm{sign}(x)$; в) $y = \sqrt[3]{x}$; г) $y = (x-1)D(x)$, где $D(x)$ — функция Дирихле?

7. При каких значениях a и b функция
$$\begin{cases} 2x - 3, & \text{если } x \leqslant 1 \\ x^2 + ax + b, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$
а) непрерывна на всех числовой прямой;
б) дифференцируема на всех числовой прямой?

Теорема о производной сложной функции. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $F(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

8. Докажите, что формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ верна для всех $n \in \mathbb{Z}$.

9. Найдите производные следующих функций:
а) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$; в) $y = \dfrac{1}{(2x+1)^5}$; д) $y = \sqrt[3]{\dfrac{5-2x}{4x+1}}$;
б) $y = (x^2 - 4x + 5)^2$; г) $y = \sqrt{1 - x^2}$; е) $y = \sqrt{x - \sqrt{2x - \sqrt{x-1}}}$.

10. Найдите производную функции $y = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}}$ двумя способами (упростить выражение можно до дифференцирования, а можно после).

Определение. $f''(x) = (f'(x))'$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$

11. Вычислите производные:
а) $\left(\dfrac{x^3}{x-1}\right)''$; в) $(2x^6 - 6x^4 + 1)^{(4)}$; д) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(50)}$; ж) $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}$;
б) $\left(\dfrac{2x^3}{x^2-4}\right)''$; г) $(x^m)^{(n)}$; е) $((x^2-1)^6(x^3+5)^{10})^{(42)}$; з) $\left(\dfrac{1}{x^2+7x+12}\right)^{(48)}$.

Домашнее задание

Мордкович, №№ 40.1, 40.5(а,в) 41.11(б), 41.12(б), 41.13(б), 41.15(б), 41.17(б), 41.20(б), 41.35(б), 41.69, 42.11(а,б), 42.19(а), 42.25(б), 42.26(б).