Производная-2

Дифференциал

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Зафиксируем x_0 и рассмотрим приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то и $\Delta f \to 0$.

*Определение. Если $\Delta f = k\Delta x + o(\Delta x)$, то выражение $k\Delta x$ называют **дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $df(x)$ или dy.*

Замечание 1. Дифференциал — линейная относительно Δx часть приращения функции.

Замечание 2. df отличается от Δf на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

12. Истолкуйте геометрический смысл дифференциала с помощью касательной.

    Теорема. У функции $f(x)$ есть дифференциал в точке x_0 тогда и только тогда, когда в точке x_0 у нее есть конечная производная.

    При этом коэффициент k из определения дифференциала равен $f'(x_0)$, т.е. $dy = f'(x)\Delta x$.

13. Найдите дифференциалы функций $y = x$, $y = 2x + 3$.

    Как только что проверено, $dx = \Delta x$. Поэтому $dy = f'(x)dx$ или $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

    Для приближенного вычисления значения функции можно заменить приращение функции на ее дифференциал (а соответствующий участок графика — на отрезок касательной). При этом в формуле $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + dx + o(\Delta x)$ отбрасывается $o(\Delta x)$, откуда получается приближенное равенство $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dx = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

14. Вычислите приближенно $2,014^3$. Оцените погрешность и оставьте только верные цифры.

15. (д/з) Вычислите приближенно $\sqrt{26}$; $\sqrt[3]{26}$. Сравните результат с мнением калькулятора.

Физический смысл производной

Как уже отмечалось, мгновенная скорость равна производной координаты по времени. А какая физическая величина соответствует второй производной координаты по времени?

16. Закон движения точки по оси Ox задается формулой $x = 10t + 5t^2$, где t — время в секундах, а x — расстояние в метрах. Найдите скорость и ускорение точки в момент $t = 20$.

17. а) По данным графикам зависимости координаты от времени начертите графики зависимости скорости и ускорения от времени.
    б) По данным графикам скорости начертите графики координаты и ускорения.

18. Определите понятие мгновенной угловой скорости вращения и дайте выражение этой скорости через производную.

    *Аналогично с помощью производной определяется мгновенная скорость изменения массы вещества в процессе радиоактивного распада, растворения в воде и т.п. Вообще, **производная есть мгновенная скорость изменения функции**.*

    Физические величины могут меняться не только с течением времени. Например, масса однородного стержня длины x равна $m(x) = kx$, где k — линейная плотность стержня, одинаковая по всей его длине. Если же стержень неоднороден, то средняя линейная плотность участка от x_0 до $x_0 + h$ равна $k_{\text{ср.}} = \frac{m(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, а линейная плотность в точке x_0 равна $m'(x_0)$

19. Определите понятие перепада температуры в данной точке неравномерно нагретого стержня и выразите его через производную.

20. Определите понятие силы переменного тока в данный момент времени и выразите его через производную.

21. Количество электричества, протекшее через проводник, начиная с момента $t = 0$, выражается формулой $q(t) = 3t^2 - 2t$. Вычислите силу тока в конце шестой секунды.

22. Тело, брошенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0, движется по закону $h(t) = h_0 + v_0 - \frac{gt^2}{2}$. Найдите высоту тела в момент времени, когда скорость тела в 2 раза меньше первоначальной, если $h_0 = 4$м, $v_0 = 3$м/с и $g \approx 10$м/с^2.

Дифференцирование тригонометрических функций

23. Найдите производные тригонометрических функций:

    а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

24. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции есть нечетная функция, а производная нечетной дифференцируемой функции есть четная функция.

25. Докажите, что производная периодической дифференцируемой функции есть периодическая функция с тем же периодом.

26. Найдите производные функций:

    а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos^2 \sqrt{x}$; в) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $y = x \operatorname{ctg} x$.

27. Продифференцируйте функцию.

    а) $y = \sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x$; в) $y = \sin(\cos x)$; д) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;
    б) $y = \sqrt{1 - \cos x + 0,25 \cos^2 x}$; г) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$; е) $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{\cos x}}$.

Производная обратной функции

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0:
1) имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$;
2) имеет ненулевую производную,
Тогда обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $g'_y = \frac{1}{f'_x}$.

28. Докажите, что формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$ верна не только для $\alpha \in \mathbb{N}$, но и: а) для $\alpha \in \mathbb{Q}$; б) для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

29. Вычислите производные следующих функций: а) $y = x\sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x\sqrt[3]{x}}}$.

30. Получите формулы производных обратных тригонометрических функций.

31. Вычислите производные следующих функций:

    а) $y = \operatorname{arctg} 2x$; в) $y = \arcsin(\sin x)$; д) $y = \arcsin x + \arccos x$;
    б) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$; г) $y = \arcsin x \cdot \arccos x$ е) $y = \arccos \frac{2x}{1 + x^2}$.