

## Производная-3

### Геометрический смысл производной

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то в этой точке существует касательная к графику  $f(x)$ . Ее угловой коэффициент  $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ .

Обратно, если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и ее график имеет в точке  $(x_0; f(x_0))$  не вертикальную касательную с угловым коэффициентом  $k$ , то существует  $f'(x) = k$ . В случае вертикальной касательной  $f'(x_0) = \infty$ .

32. Приведите пример функции, график которой имеет вертикальную касательную.
33. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции  $y = |x^2 - 8x + 10|$  в точке с абсциссой  $x_0 = 2$ .
34. Под каким углом пересекаются касательные к графику функции  $y = \sqrt{5 - 2x}$ , проведенные в точках  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 2$ ?
35. Докажите, что если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то уравнение касательной к графику в этой точке имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

36. Напишите уравнения касательной к графику функции  $y = \sin x$  в точке  $x_0 = 0$ . Как оно связано с первым замечательным пределом?
37. Найдите координаты точки пересечения двух касательных к графику функции  $y = \cos x$ : первая в точке с абсциссой  $x = \frac{\pi}{6}$ , а вторая в точке с абсциссой  $x = \frac{7\pi}{6}$ .
38. Напишите уравнение касательной к кривой  $y = x^2 - 6x + 2$ , проходящей параллельно прямой  $y = -2x + 8$ .
39. Напишите уравнения всех касательных к графику функции  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x$ , составляющих с осью  $Ox$  угол  $60^\circ$ .
40. Напишите уравнение касательных к кривой  $y = x^2 - 4x + 3$ , проходящих через точку  $M(2; -5)$ .
41. Напишите уравнение касательной к кривой  $y = \sqrt{4 - 2x - x^2}$ , проходящей через точку  $M(3; 0)$ .
42. Найдите уравнения всех касательных к графику функции  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ , ограничивающих вместе с координатными осями треугольник площади 2.
43. Найдите уравнения двух параллельных касательных к графикам  $y = \sin 2x - 3x^3$  и  $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$ .
44. На графике функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$  найдите все точки, касательная в каждой из которых пересекает положительные полуоси, отсекая от них равные отрезки.
45. Углом между кривыми называют угол между касательными к ним в точке пересечения. Под каким углом пересекаются кривые  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \frac{1}{x}$ ?
46. Функция  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$  задает половинку окружности. Докажите, что касательная в каждой точке этой полуокружности перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания.
47. Найдите уравнения двух параллельных прямых, касающихся графика функции  $y = \frac{1}{x}$  и находящихся друг от друга на расстоянии 1.
48. Докажите, что прямая  $y = 2x - 1$  не пересекает кривую  $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ . Найдите расстояние между их ближайшими точками.
49. Найдите уравнения общих касательных к параболам  $y = 2x^2 - x + 5$  и  $y = -x^2 + 7x - 1$ .
50. Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции  $y = x^4 - 4x^3$  в двух различных точках.

Домашнее задание

51. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции  $y = \frac{3x+1}{2x-1}$ : первая в точке с абсциссой  $x = -1$ , а вторая в точке с абсциссой  $x = 3$ .
52. К параболе  $y = 4x - x^2$  в точке на ней с абсциссой  $x_0 = 3$  проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью  $Ox$ .
53. Найдите все общие точки графика функции  $y = 3x - x^2$  и касательной, проведенной к этому графику через точку  $P(0; 16)$
54. Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых касательные к графикам функций  $y = 3 \cos 5x + 2$  и  $y = 5 \cos 3x + 2$  в точках с абсциссой  $x$  параллельны.
55. Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = x^2 - 2x - |4x|$ , которая касается его в двух точках. Сделайте чертеж.
56. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами  $(1; 3)$ , касающейся графика функции  $y = 8\sqrt{x} - 7$  и пересекающей в двух различных точках график функции  $y = x^2 + 4x - 1$ .
57. Парабола с вершиной на оси  $Ox$  касается прямой, проходящей через точки  $A(1; 2)$  и  $B(2; 4)$ , в точке В. Найдите уравнение параболы.
58. Найдите геометрическое место вершин всех парабол вида  $y = x^2 + ax + b$ , касающихся прямой  $y = 4x - 1$ .

Мордкович, №№ 42.34(а, б), 42.38, 43.7(г), 43.8(г), 43.26(в, г), 43.33(а), 43.41(б), 43.48(а), 43.52(б), 43.58(а), 43.62(а), 43.65(а), 43.69, 43.70.