# *Исследование функции на монотонность и экстремум*

## *Экстремумы. Критические точки. Теорема Ферма*

*Определение.* Функция $y = f(x)$ в точке $x_0$ имеет ***максимум (минимум)***, если значение функции в этой точке больше (меньше), чем ее значения во всех точках вблизи $x_0$, т.е. если для всех точек $x$ некоторой проколотой окрестности точки $x_0$ имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***, а значения функции в этих точках — ***экстремумами*** функции.

Данные выше определения описывают строгие локальные экстремумы. В определении нестрогих экстремумов вместо строгих неравенств используются нестрогие.

***Теорема Ферма (Необходимое условие существования экстремума).*** В точке экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует.

59. Истолкуйте теорему Ферма геометрически.

60. Проверьте, что теорема Ферма верна как для строгого, так и для нестрогого экстремума.

61. а) Пусть функция непрерывна, но недифференцируема в точке $x_0$. Обязательно ли она имеет в этой точке экстремум? б) Пусть функция имеет нулевую производную в точке $x_0$. Обязательно ли она имеет в этой точке экстремум?

    *Определение.* Значения аргумента из области определения функции, при которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются ***критическими точками***.

62. Нарисуйте графики функций. Укажите критические точки. Являются ли они точками минимума или максимума?

    а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; в) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

63. Найдите критические точки функции:

    а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-5)$; в) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

64. * Найдите критические точки функции $y = 4x - \sin 2x + 4\sqrt{2}\cos x$.

## *Домашнее задание*

65. Найдите критические точки функции:

    а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; б) $f(x) = (x-1)^2(x-6)^3$; в) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

66. Найдите критические точки функции $y = \sin x - \dfrac{2}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x$.

## *Теоремы о среднем*

***Теорема Ролля.*** Пусть функция $f(x)$:
1) непрерывна на отрезке $[a;\, b]$;
2) дифференцируема на интервале $(a;\, b)$;
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда на этом интервале найдётся точка $\xi$ такая, что $f'(\xi) = 0$.

*Геометрический смысл*: Если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

67. Покажите с помощью контрпримеров, что ни одним из трех условий теоремы Ролля нельзя пренебречь.

68. Докажите, что если все корни многочлена вещественны, то его производные всех порядков тоже имеют только вещественные корны.

Если повернуть оси координат, то концы дуги AB уже не будут находится на одинаковом расстоянии от новой оси Ox, но касательная по прежнему будет параллельна хорде AB. Поэтому естественно ожидать, что имеет место теорема:

На дуге AB гладкой кривой y = f(x) найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна стягивающей ее хорде AB. Сформулируем теорему аналитически:

***Теорема Лагранжа.*** Если функция f(x):
1) непрерывна на отрезке $[a;\, b]$;
2) дифференцируема на интервале $(a;\, b)$,

то на этом интервале найдется такая точка $\xi$, что $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

69. Докажите, что если функция непрерывна на отрезке, а ее производная равна нулю во всех его внутренних точках, то функция постоянна на этом отрезке.

70. Докажите, что если функции $f(x)$ и $\phi(x)$ непрерывны на отрезке и имеют внутри этого отрезка одинаковые производные, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.

71. Найдите функции по их производным:
а) $f'(x) = 3x^2 + 2x$; б) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-7}}$; в) $f'(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$; г) $f'(x) = \dfrac{2}{(2x+3)^2}$.

72. Найдите значение $\xi$ для функции $f(x) = x^3 - 3x + 4$ и отрезка $[1;\ 3]$.

73. Какой "результат"получится при попытке применить теорему Лагранжа к функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и отрезку $[-2;\ 1]$. Почему?

74. Докажите, что для функции $f(x) = x^2+px+q$ и любого отрезка $[a;\ b]$ выполняется равенство $\xi = \dfrac{a+b}{2}$.

75. Докажите неравенство $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

## *Исследование функции на монотонность и экстремум*

*Признак монотонности функции.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке (конечном или бесконечном), а ее производная положительна (отрицательна) во всех внутренних точках этого промежутка. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на данном промежутке.

76. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на некотором промежутке. Следует ли отсюда, что ее производная положительна во всех внутренних точках этого промежутка?

77. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на некотором промежутке. Докажите, что ее производная неотрицательна во всех внутренних точках этого промежутка.

78. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке, а ее производная неотрицательна во всех внутренних точках этого промежутка. Следует ли отсюда, что $f(x)$ возрастает на данном промежутке?

79. Исследуйте функцию на монотонность (т.е. найдите промежутки возрастания и убывания): а) $f(x) = x + \dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y = \dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$.

***Усиленный признак монотонности функции.*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $I$, а ее производная неотрицательна (неположительна) во всех внутренних точках $I$ и равна нулю либо не существует лишь в конечном множестве точек. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на $I$.

80. Исследуйте функцию на монотонность: а) $f(x) = x^3$; б) $y = x + \sin x$.

*Замечание.* Можно рассматривать также возрастание функции не на интервале, а в точке. Функция возрастает в точке, если существует некоторая окрестность точки, где функция возрастает. При этом функция возрастает на интервале тогда и только тогда, когда она возрастает в каждой точке этого интервала.

81. Непрерывная функция $y = f(x)$ возрастает в точке $a$. Можно ли утверждать, что $f'(a) = 0$?

***Достаточное условие существования экстремума.*** Пусть функция непрерывна в точке $x_0$ и дифференцируема вблизи этой точки. Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то в точке $x_0$ функция имеет максимум. Если же при переходе через $x_0$ слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.

82. Пусть $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Докажите, что тогда функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ строгий локальный минимум (максимум)

83. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции:
а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; б) $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$; в) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^4}$.

84. Дана функция $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. Проведите ее "мини-исследование": найдите нули, интервалы знакопостоянства, исследуйте на монотонность и экстремумы. Постройте график этой функции.

85. Найдите точки минимума функции $y = \sqrt{3}\cos\dfrac{x}{2} + \sin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-3}{2}$.

## *Домашнее задание*

86. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции:
а) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; б) $y = (x-1)^4(x+2)^3$; в) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$; г) $\sqrt{2x^2 - x + 2}$.

87. Найдите точку минимума функции $y = (0,5 - x)\cos x + \sin x$, принадлежащую промежутку $(0,\ \dfrac{\pi}{2})$.

88. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2$, имеющей единственную общую точку с графиком этой функции.

89. Исследуйте функцию $y = x^3 - 3x^2$ на монотонность и экстремум. Постройте эскиз ее графика. Постройте также найденную в предыдущей задаче касательную.