Теорема Кронекера

Задача 1. На бесконечной в одну сторону клетчатой полоске записаны целые числа. Докажите, что найдется ее кусок, сумма чисел в клетках которого делится на 2011.

Задача 2. Пусть теперь на этой полоске записаны произвольные числа. Докажите, что найдется ее кусок, сумма чисел в клетках которого отличается от целого не больше, чем на 0,001.

Задача 3. а) По окружности длины 1 прыгает кузнечик с шагом $\alpha > 0$. Докажите, что кузнечик будет сколь угодно близко подходить к своему начальному положению.
б) Докажите, что не позднее, чем за n шагов кузнечик приблизится к началу на расстояние, меньшее $1/n$.

Определение 1. Множество X называется *плотным* в множестве Y, если всякая окрестность любой точки из Y содержит точку из X.

Задача 4 (одномерная теорема Кронекера). Если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то множество $\{n\alpha\}$ плотно на отрезке $[0, 1]$. (через $\{x\}$ обозначается дробная часть числа x)

Задача 5. По круглому стадиону длины 1 прыгает кузнечик с иррациональным шагом α. Стадион разбит на два равных сектора: первый и второй. Судья записывает номера секторов, посещаемых кузнечиком. Докажите, что эта последовательность непериодична.

Задача 6. а) Два кузнечика одновременно начинают прыгать по окружности из одной точки, один — с шагом α, другой — с шагом β. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ рано или поздно оба одновременно окажутся в ε–окрестности стартовой точки.
б) Докажите, что не позднее чем за n^2 шагов оба они окажутся на расстоянии меньше $1/n$ от стартовой точки.

Задача 7. Докажите, что функция $\sin x + \sin \sqrt{2}x$ непериодична.

Задача 8. а) На координатной плоскости в начале координат сидит стрелок, а в остальных точках с целочисленными координатами — круглые зайцы радиуса ε. Стрелок стреляет по прямой $y = kx$, где k — иррационально. Докажите, что он обязательно попадёт в какого-то зайца.
б) Тоже самое, но теперь зайцы находятся в точках вида $(a+n, b+m)$, где $n, m \in \mathbb{N}$, а a и b — фиксированы.

Определение 2. Назовем набор вещественных чисел $x_1, \ldots, x_s$ *линейно независимым* над $\mathbb{Q}$, если для любых рациональных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ равенство

$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i x_i = 0$ влечет равенство нулю всех α_i. (Например, независимость 1 и α означает иррациональность α).

Задача 9. Докажите, что числа $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Задача 10 (Двумерная теорема Кронекера). Пусть $1, \alpha, \beta$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Докажите, что множество пар $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$ плотно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$