Пределы последовательностей. Вычисление.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если ее предел равен 0.

Задача 1. а) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ тогда и только тогда, когда существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$ такая, что $x_n = a + \alpha_n$
б) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Докажите, что $x_n \neq 0$ почти всюду и $\lim\limits_{n\to\infty} 1/x_n = 0$. Верно ли обратное утверждение?
в) Пусть последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно малая, $\{y_n\}$ — ограниченная. Докажите, что последовательность $\{x_n y_n\}$ — бесконечно малая.

Задача 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Докажите, что
а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$
б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$
в) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$
г) если $b \neq 0$, то $y_n \neq 0$ почти всюду и $\lim\limits_{n\to\infty} (1/y_n) = 1/b$.
д) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n/y_n) = a/b$, при $b \neq 0$.
е) если $x_n \geq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{x_n}) = \sqrt{a}$.

Задача 3. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, а $\{y_n\}$ не имеет. Имеют ли пределы последовательности а) $\{x_n + y_n\}$; б) $\{x_n y_n\}$?

Задача 4. Найдите пределы последовательностей

а) $x_n = \dfrac{1000n}{n^2 - 101}$

б) $x_n = \dfrac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$

в) $x_n = \dfrac{n^2 \sin n}{n^3 + 1}$

г) $x_n = \dfrac{n+2}{\sqrt{n^2 + n}}$

д) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

е) $x_n = n - \sqrt[3]{n^3 + 3}$

Факт (Неравенство Бернулли). $(1+x)^n \geq 1 + nx$, при $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Задача 5. Докажите, что
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$, при $a > 1$.
б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, при $a > 1$.
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P(n)}{a^n} = 0$, где $P(n)$ — произвольный многочлен, $a > 1$.

Задача 6. Найдите пределы последовательностей
а) $x_n = \frac{2^n + n^2}{3^n + n}$; б) $x_n = 2^n - n^k$; в) $x_n = \sqrt[n]{2}$; г) $x_n = \sqrt[n]{n}$;

Задача 7. Придумайте последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремящиеся к нулю такие, что
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$
б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$
в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$
г) Последовательность $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ не стремится к бесконечности и не имеет конечного предела.

Задача 8 (Теорема о двух милиционерах). Пусть последовательность y_n заключена между последовательностями x_n и z_n, т.е. при любом n выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то последательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.