Ряды

Определение 1. Сумма бесконечного ряда чисел определяется следующим образом. Пусть дан ряд:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Обозначим через S_n сумму первых n чисел ряда (ее называют *частичной суммой*). Если последовательность $\{S_n\}$ имеет предел S, то число S называют *суммой ряда.* (пишут $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$) Сам ряд в таком случае называют *сходящимся.* Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела, то говорят, что ряд *расходится.*

Задача 1. Докажите, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.

Задача 2 (Нахождение суммы по определению). Найдите сумму а) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, где $|x| < 1$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Задача 3 (Составление уравнения). Найдите сумму а) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, где $|x| < 1$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Задача 4 (Перестановка членов). а) Докажите, что если для любого n $a_n \geqslant 0$ и $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция, то $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$.
б*) Придумайте ряд (с произвольными a_n) и биекцию $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $\sum a_n \neq \sum a_{\sigma(n)}$.

Определение 2. *Суммой* двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ называется ряд

$$\sum (a_n + b_n).$$

Произведением двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$ называется ряд

$$\sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0).$$

Задача 5. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. а) Докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$.
б) Пусть для любого n $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$. Докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) = ab$.
в*) Верно ли это без условия $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$?

Задача 6. Найдите сумму а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

Задача 7 (Бином Ньютона). Обозначим через $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$, где r действительное, k — натуральное. Найдите $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$, где $0 \leq x < 1$ и а) r — натуральное; б) r — целое отрицательное; в*) $r = \frac{1}{2}$.

Задача 8. Сходятся ли следующие ряды а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{20n+100}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$?

Задача 9. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ с точность до а) $\frac{1}{10}$ б) $\frac{1}{100}$.

Задача 10 (Признак Коши). Докажите что ряд $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$, существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $n, m > N$ $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$.

Задача 11 (Признак сравнения). Пусть даны два ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Тогда, если начиная с некоторого места $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| \leqslant b_n$, то из сходимости ряда $\sum b_n$ следует сходимость ряда $\sum a_n$.

Задача 12. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ а) при $p = 1$; б) при $p = 2$; в) при произвольном $p > 0$.