Полнота множества действительных чисел. 10 задача

Множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел называется множество с двумя бинарными операциями сложение $+$ и умножение $\cdot$ и отношением $\leqslant$ удовлетворяющее аксиомам:

1. *(Коммутативность сложения)* $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a$.
2. *(Ассоциативность сложения)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. *(Существование нуля)* $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}\ a + 0 = a$.
4. *(Противоположный элемент)* $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R}$ такой, что $a + b = 0$. (Такой элемент называется противоположным и обозначается $-a$).
5. *(Коммутативность умножения)* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
6. *(Ассоциативность умножения)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
7. *(Существование единицы)* $\exists 1 \neq 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1 = a$.
8. *(Обратный элемент)* $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}\, \exists b \in \mathbb{R}$ такой что $a \cdot b = 1$. (Такой элемент называется обратным и обозначается a^{-1}).
9. *(Дистрибутивность)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a(b + c) = ab + ac$.
10. *(Рефлексивность порядка)* $\forall a \in \mathbb{R}\ a \leqslant a$.
11. *(Антисимметричность порядка)* Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$.
12. *(Транзитивность порядка)* Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.
13. *(Вполне упорядоченность)* Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ или $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$.
14. *(Согласованность отношения порядка с операциями)* Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a + b > 0$ и $ab > 0$.
15. *(Существование точной верхней грани)* Всякое непустое, ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Задача 10*. Выведите из этих аксиом *аксиому Архимеда*: $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists n \in \mathbb{N} : a < n$.

Указание: От противного, предположите что множество натуральных чисел ограничено.