Полнота множества действительных чисел. Материалы лекции.

Мы уже довольно много занимались последовательностями и их пределами. Следующее утверждение является стандартной ошибкой начинающих:«любая монотонно возрастающая последовательность стремится к бесконечности». Оно неверно, контрпримеры:

1. Последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ — общая формула $x_n = \frac{n}{n+1}$
2. Последовательность $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots$ — общая формула $x_n = 2 - \frac{1}{2^n}$
3. Последовательность $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ — общая формула $x_n = -\frac{1}{n+1}$

Все эти последовательности ограничены. Кроме, они все имеют вид число плюс бесконечно малая последовательность. Таким образом, мы приходим к:

Гипотеза (Об ограниченной монотонной последовательности). Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Попробуем это доказать. Для удобства, сразу введем обозначения: последовательность $\{x_n\}$, можно считать, что она возрастает (нестрого) и $x_n \in [a, b]$. Обязательно ли число b будет пределом $\{x_n\}$? Нет, хотя $\{x_n\}$ к нему приближается, но она может не подойди к нему достаточно близко. Т.е. предел может быть немного меньше b, понятно только, что предел $c \in [a, b]$.

Для того, чтобы найти предел, воспользуемся следующей конструкцией[1]. Разобьем отрезок $[a, b]$ пополам $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Тогда либо вся последовательность x_n лежит в первой половине, либо вся последовательность x_n, начиная с некоторого места, лежит во второй половине. В первом случае предел $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$, во втором случае предел $c \in [\frac{a+b}{2}, b]$. Таким образом, мы можем заменить отрезок $[a, b]$ на вдвое меньший отрезок $[a_1, b_1]$ и искать предел на нем (повторим для ясности — в первом случае $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$, во втором $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$).

С отрезком $[a_1, b_1]$ поступим аналогичны образом: разобьем его пополам. Последовательность x_n либо почти вся лежит в первой половине $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ либо почти вся лежит во второй половине $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$. Соответствующую половину возьмем в качестве отрезка $[a_2, b_2]$. И так далее.

Мы получили последовательность отрезков

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

[1]Она иногда называется «метод половинного деления» или «бинарный поиск».

Длина каждого следующего отрезка вдвое меньше, чем предыдущего. Последовательность $\{x_n\}$ почти вся лежит на отрезке $[a_n, b_n]$, $\forall n$, поэтому и предел должен лежать на каждом отрезке $[a_n, b_n]$. Таким образом, $c \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. То, что пересечение не пусто, интуитивно понятно. Мы этот факт примем в качестве аксиомы:

Аксиома (Кантора о вложенных отрезках). Пусть есть бесконечная система вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

Тогда все эти отрезки имеют хотя бы одну общую точку.

Задача 1. Если длины отрезков будут стремиться к нулю, то эта общая точка будет единственная.

Последний факт удобно доказывать от противного: предположим, что общих точек хотя бы 2, тогда … В нашем случае длины отрезков стремятся к нулю, поэтому общая точка c существует и единственная. Осталось доказать, что c действительно является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует n такое, что длина отрезка $[a_n, b_n]$ меньше ε. Так как $c \in [a_n, b_n]$, то отрезок $[a_n, b_n]$ лежит в ε–окрестности точки c, $[a_n, b_n] \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Так как почти вся последовательность $\{x_n\}$ лежит на отрезке $[a_n, b_n]$, то почти вся последовательность x_n лежит в ε–окрестности точки c. Значит $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Гипотеза доказана.

Замечание. Существует несколько способов построения действительных чисел. Мы выбрали в качестве аксиомы утверждение о вложенных отрезках и вывели из нее утверждение об ограниченной монотонной последовательности[2]. Можно было бы поступить наоборот и выбрать в качестве аксиомы утверждение об ограниченной монотонной последовательности, и тогда утверждение о стягивающихся отрезках можно было бы доказать (задача 6 из листика).

Замечание. Существует еще ряд утверждений, эквивалентных аксиоме о вложенных отрезках, каждое из которых можно брать за аксиому. Такие аксиомы называют «аксиомами полноты», так как они выражают свойство, что среди действительных чисел нет дыр.

Существует еще один способ построения множества действительных чисел. А именно, их можно определить как множество десятичных дробей

$$\overline{b_{-n} \ldots b_{-1} b_0, b_1 \ldots b_m \ldots}$$

[2]Строго говоря, для доказательства того, что длины отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю, мы еще использовали аксиому Архимеда

В нашем подходе надо выводить существование десятичной записи у любого числа из аксиомы о вложенных отрезках. Это делается следующим образом. Пусть для простоты число $x \in [0,1]$. Разобьем отрезок $[0,1]$ на 10 равных частей. Если точка x лежит на отрезке $[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$, то первая цифра после запятой числа x равна $i-1$. Разобьем теперь отрезок $[\frac{i-1}{10}, \frac{i}{10}]$ на 10 равных частей, если x попадает в j–ую часть, то вторая цифра после запятой числа x равна $j-1$. И так далее, каждый следующий отрезок будет в 10 раз меньше предыдущего, и в их пересечении будет ровно одно число x. Десятичная запись x кодирует номера выбираемых отрезков.

Такая кодировка однозначна кроме случая, когда x попадает на одну из точек деления. Тогда у нас есть выбор, какой из отрезков выбирать — левый или правый. Если мы выберем левый, то и далее мы все время будем выбирать крайний слева отрезок. Если мы выберем правый, то и далее мы будем все время выбирать крайний справа отрезок. Поэтому следующие записи равны:

$$\overline{b_{-n}\dots b_{-1}b_0, b_1\dots b_{i-1}b_i999\dots} = \overline{b_{-n}\dots b_{-1}b_0, b_1\dots b_{i-1}(b_i+1)000\dots}$$