# Счетные и несчетные множества

**Задача 1.** Между какими из следующих множеств существует биекция а) натуральные числа; б) целые неотрицательные числа; в) четные натуральные числа; г) целые числа; д) простые числа?

**Определение 1.** Два множества $A$ и $B$ называются *равномощными*, если между ними существует биекция. Иногда говорят, что *мощности* множеств $A$ и $B$ равны, пишут $|A| = |B|$.

Мощность $A$ меньше либо равна мощности $B$, если множество $A$ равномощно подмножеству множества $B$. Записывается как $|A| \leqslant |B|$.

**Замечание.** Можно доказать, что если $|A| \leqslant |B|$ и $|B| \leqslant |A|$, то $|A| = |B|$, см. задачу 15.

**Определение 2.** Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным.*

**Задача 2.** В гостинице бесконечно много комнат, комнаты занумерованы натуральными числами. Все комнаты заняты.
а) Приехал новый постоялец. Как переселить жильцов гостиницы так, чтобы вновь приехавшему тоже достался отдельная комната?
б) Поблизости есть еще одна такая гостиница и ее закрывают. Как поселить жильцов обеих гостиниц в первую, чтобы каждый жил в отдельной комнате?

**Задача 3.** а) Докажите, что любое бесконечное подмножество множества натуральных чисел счетно. б) Докажите, что любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

**Задача 4.** Может ли король обойти бесконечную шахматную доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

**Задача 5.** а) Докажите, что множество пар целых чисел счетно. б) Докажите, что множество рациональных чисел счетно. в) Докажите, что множество рациональных точек плоскости (точек, обе координаты которых рациональны) счетно.

**Задача 6.** Пусть $A$ — бесконечное множество, $M$ — а) конечное б) счетное множество. Докажите, что $A \cup M$ равномощно $A$.

Указание: сперва разберите случай счетного $A$. Произвольное бесконечное $A$ удобно представить в виде $A = A_1 \sqcup M_1$, где $M_1$ счетное множество.

**Задача 7.** Пусть $A$ — несчетное множество, $M$ — а) конечное б) счетное множество. Докажите, что $A \backslash M$ равномощно $A$.

**Определение 3.** Про множество, равномощное отрезку $[0, 1]$, говорят, что оно имеет *мощность континуум.* Альтернативные термины: *континуальное множество* или просто *континуум.*

**Задача 8.** Докажите, что следующие множества континуальны: а) интервал $(0,1)$; б) окружность $x^2+y^2=1$; в) луч $(0,+\infty)$; г) множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$; д) множество всех иррациональных чисел.

**Задача 9*.** Докажите, что множество действительных числе несчетно.
**Доказательство 1. (Диагональный процесс Кантора)** Предположим, что все действительные числа отрезка $[0,1]$ занумерованы $x_1, x_2, \ldots$. Постройте бесконечную десятичную дробь которая не совпадает ни с одной из данных.
**Доказательство 2. Стягивающиеся отрезки**) Предположим, что все действительные числа отрезка $[0,1]$ занумерованы $x_1, x_2, \ldots$. Постройте бесконечную последовательность стягивающихся отрезков, так что их пересечение было точкой отличной от $x_1, x_2, \ldots$.

**Задача 10.** Найдите мощности следующих множеств а) множество конечных последовательностей нулей и единиц; б) множество бесконечных последовательностей нулей и единиц; в) множество бесконечных периодических последовательностей нулей и единиц.

**Задача 11.** а) Докажите, что множество точек квадрата $[0,1]\times[0,1]$ равномощно континууму. б) Докажите, что множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$ континуально.

**Задача 12.** а) Может ли множество, состоящее из непересекающихся интервалов на прямой, быть несчетным? Указание: на любом интервале есть рациональная точка.
б) Может ли множество, состоящее из непересекающихся окружностей на плоскости, быть несчетным?
в*) Может ли множество, состоящее из непересекающихся «восьмерок» на плоскости, быть несчетным?

**Задача 13.** Найдите мощности следующих множеств а) множество конечных подмножеств множества натуральных чисел; б) множество произвольных подмножеств множества натуральных чисел.

**Задача 14*.** а) Для любого множества $A$ через $2^A$ обозначим множество подмножеств множества $A$. Докажите, что между множествами $A$ и $2^A$ не существует биекции.
б) Докажите, что существует множество мощности больше чем континуум.
в) Докажите, что существует бесконечно много различных бесконечных мощностей.

**Задача 15* (Теорема Кантора–Бернштейна–Шрёдера).** Если множество $B$ равномощно подмножеству множества $A$, а множество $A$ равномощно подмножеству множества $B$, то множества $A$ и $B$ равномощны.