Счетные и несчетные множества. 11 задача

Задача 11. а) Докажите, что множество точек квадрата $[0,1]\times[0,1]$ равномощно континууму. б) Докажите, что множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$ континуально.

Доказательство. а) Обозначим через

$$\mathbb{D} = \Big\{0, a_1a_2a_3\dots \,|\, a_i \in \{0,\dots,9\}\Big\}$$

множество бесконечных десятичных дробей. Тогда, если выбросить из $\mathbb{D}$ все дроби которые заканчиваются на 9 в периоде, то полученное множество будет равномощно множеству $[0,1]$. Так как множество дробей заканчивающихся на 9 в периоде счетно, то по задаче 7 получаем

$$\big|[0,1]\big| = \big|\mathbb{D}\big|,$$

т.е. существует биекция $\varphi\colon [0,1]\to\mathbb{D}$.

Теперь заметим, что отображение $\alpha\colon \mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}$, определенное по формуле

$$(0,a_1a_2a_3\dots;\ 0,b_1b_2b_3\dots) \mapsto 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots,$$

является биекцией. Значит, нужная нам биекция между квадратом $[0,1]\times[0,1]$ и отрезком $[0,1]$ может быть построена как композиция:

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times[0,1]} \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & {[0,1]} \\
\mathbb{D}\times\mathbb{D} \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{D} \arrow[u, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

б) По задаче 8г, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ равномощно отрезку $[0,1]$. Тогда биекция между точками плоскости $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и отрезком $[0,1]$ может быть построена как композиция:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1],$$

где существование второй биекции следует из пункта а). $\square$