

Операции над множествами и мощности. Материалы лекции

1 С точки зрения мощностей мы изучали множества трех видов — конечные, счетные и континуальные. Операция объединения множеств является естественным аналогом сложения чисел. Таблица объединения выглядит следующим образом:

\cup	Конечн.	Счет.	Конт.
Конечн.	Конечн.	Счет.	Конт.
Счет.	Счет.	Счет.	Конт.
Конт.	Конт.	Конт.	Конт.

2 **Определение 1.** *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество пар:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Таблица умножения выглядит следующим образом:

\times	Конечн.	Счет.	Конт.
Конечн.	Конечн.	Счет.	Конт.
Счет.	Счет.	Счет.	Конт.
Конт.	Конт.	Конт.	Конт.

3 Часто приходится рассматривать объединения не двух, а произвольного числа множеств. Обозначение: $\bigcup_{a \in A} B_a$, где A — множество индексов, B_a — объединяемые множества.

Конечное объединение конечных	—	конечно.	
Конечное объединение счетных	}	—	
Счетное объединение счетных			—
Счетное объединение конечных			

Задача 1. Докажите, что счетное объединение континуумов — континуум.

Можно также рассматривать произвольные произведения множеств. Например, несложно доказать, по индукции что

Конечное произведение счетных — счетно.

Задача 2. а) Найдите мощность счетного произведения континуумов.
б*) Найдите мощность континуального произведения континуумов.