Дополнительные задачи по многочленам

Просто задачи

Задача 1. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

Задача 2. Найдите все натуральные n, при которых число n^3+2n^2+4n+3 делится на число n^2+1.

Задача 3. Существует ли многочлен P степени 1000 такой, что $P(x^2+4x+2)$ делится на $P(x)$?

Задача 4 (ВМО 2001). Приведенный квадратный трехчлен $f(x)$ имеет 2 различных корня. Может ли так оказаться, что уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет 3 различных корня, а уравнение $f(f(f(x))) = 0$ имеет 7 различных корней?

Задача 5. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что существуют неалгебраические действительные числа.

Рациональные корни многочленов

Задача 6. а) Ненулевая несократимая дробь p/q — корень многочлена $P(x) = a_nx^n + \dots + a_0$ с целыми коэффициентами. Докажите, что тогда a_n делится на q и a_0 делится на p.
б) Пусть в предыдущем пункте $a_n = 1$. Докажите, что все рациональные корни P — целые числа.

Задача 7. Найдите все корни многочленов а) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$; б) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Задача 8. Разложите на множители многочлен $x^4+7x^3+21x^2+29x+14$.

Задача 9. а) Придумайте кубический многочлен с рациональным коэффициентам, корнем которого является $\sin 10^\circ$. б) Докажите, что $\sin 10^\circ$ иррационален.

Теорема Виета

Задача 10. а) Пусть многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три корня x_1, x_2 и x_3 Докажите, что справедливы *формулы Виета*:

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3), \quad b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad c = -x_1x_2x_3.$$

б) Напишите подобные формулы выражающие коэффициенты многочлена n–ой степени.

Задача 11. Есть три различных числа a, b, c. Известно, что $ab+bc+ac = 9$, $a + b + c = 6$. Докажите, что $abc > 0$.

Многочлены с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ (в $\mathbb{Z}$)

Задача 12. а) Пусть A и B — многочлены с целыми коэффициентами, старший член B равен 1. Докажите, что остаток и частное при делении многочлена A на B имеют целые коэффициенты.
б) Что будет верно если старший член многочлена B отличен от 1?

Задача 13. Докажите, что если все коэффициенты многочлена P — целые числа, и a и b — также целые, то число $(P(a) - P(b)) \vdots (a - b)$.

Задача 14. Многочлен с целыми коэффициентами в трех целых точках принимает значения 2. Может ли он принимать в какой-то целой точке значение 3?

Задача 15. Кубическое и квадратное уравнения с рациональными коэффициентами имеют общее решение. Докажите, что у кубического уравнения есть рациональный корень.

Задача 16. Многочлен P седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения ± 1. Докажите, что многочлен P *неприводим над* $\mathbb{Z}$, иными словами не существует многочленов Q_1 и Q_2 ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что $P = Q_1 Q_2$.

Многочлены с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$

Обозначим через $\mathbb{F}_p$ множество остатков по модулю p, где p — простое число. В этой части листика мы будем рассматривать множество $\mathbb{F}_p[x]$ многочленов с коэффициентами их $\mathbb{F}_p$.

Задача 17. а) Найдите $(x^2 + x + 1)^3$ в $\mathbb{F}_3[x]$.
б) Разделите с остатком $x^3 - 1$ на $2x + 1$ в $\mathbb{F}_3[x]$.

Задача 18. Найдите $(x + 1)^p$, как многочлен с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$.

Задача 19. а) Рассмотрим многочлен $x^p - x$. Найдите его корни в $\mathbb{F}_p$. Разложите его на линейные множители.
б) Исходя из полученного разложения вычислите коэффициент при x. Что за тождество получается?

Задача 20 (Критерий Эйлера). Пусть $p > 2$. а) Докажите, что многочлен $x^{\frac{p-1}{2}} - 1$ имеет своими корнями квадратичные вычеты и только их.
б) Докажите, что если a квадратичный невычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod p$.
в) Докажите, что -1 квадратичный вычет тогда и только тогда, когда $p = 4k + 1$.
г) Какой остаток дает сумма квадратичных вычетов по модулю p?

Задача 21. Найдите все неприводимые многочлены в $\mathbb{F}_2[x]$ степени не выше 3.

Задача 22. Докажите, что в $\mathbb{F}_p[x]$ существует бесконечно много неприводимых многочленов.