Числа Каталана

Определение 1. Обозначим через c_n количество способов расставить в ряд n открывающихся и n закрывающихся скобок так, чтобы запись была корректна (то есть, среди любого количества первых элементов ряда открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся). Число c_0 полагается равным 1. Число c_n называется *n-ым числом Каталана.*

((()))   (())()   ()(())   (()())   ()()()

Задача 1. Докажите что числа Каталана определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \cdots + c_nc_0 \ (n \geq 0)$$

и начальным членом $c_0 = 1$.

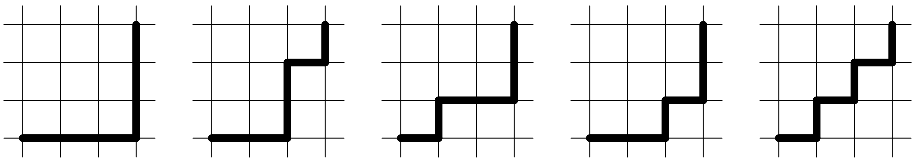
Задача 2. Найдите первые 5 чисел Каталана.

Различные интерпретации

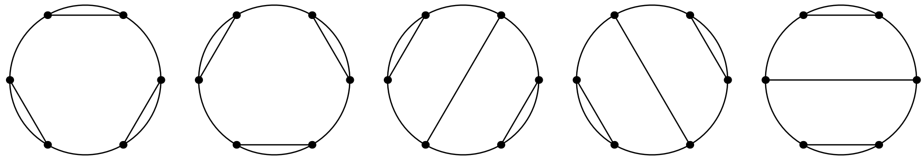
В следующих задачах приведен ряд множеств и требуется доказать, что количество элементов в них равно c_n. Для этого есть два основных способа — построить явную биекцию и проверить рекуррентное соотношение. В некоторых задачах полезно сделать и то и то.

Для однозначной трактовки условий задачи снабжены примером: списком исследуемых объектов для $n = 3$.

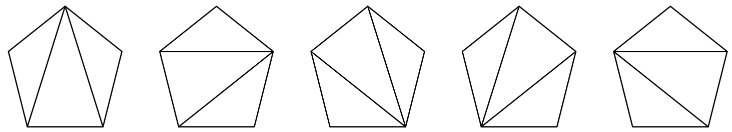
Задача 3. Докажите, что количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, не поднимающиеся выше прямой $y = x$ равно c_n.



Задача 4. Докажите, что количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами (из любой точки выходит одна хорда) равно c_n.



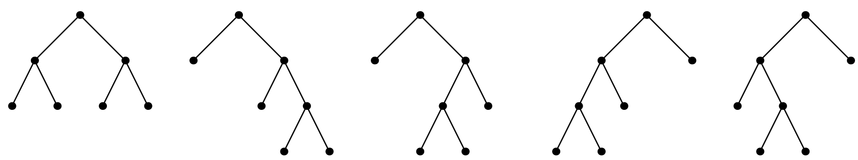
Задача 5. Докажите, что число *триангуляций* (разрезаний на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n+2)$–угольника равно c_n.



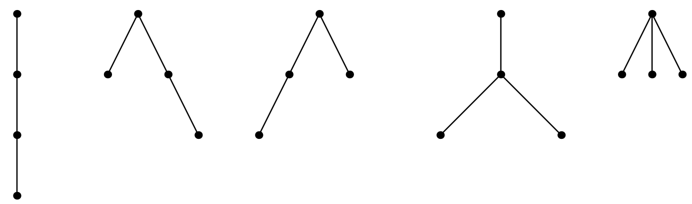
Задача 6. Докажите, что число неассоциативных произведений $n+1$ букв (иначе говоря, расстановок скобок чтобы порядок умножения был однозначно определен) равно c_n.

`a(b(cd))`   `(ab)(cd)`   `((ab)c)d`   `a((bc)d)`   `(a(bc))d`

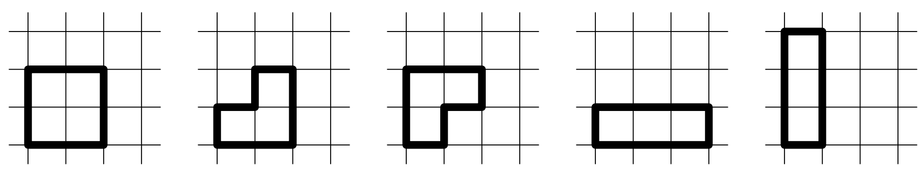
Задача 7. Докажите, что количество *плоских корневых строго двоичных деревьев* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями равно c_n.



Задача 8. Докажите, что количество *плоских корневых деревьев* с $n+1$ вершинами равно c_n.



Задача 9. Докажите, что количество *«параллеломино»* (пара путей на клетчатой бумаге с началом $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$ равно c_n.



Задача 10. Докажите, что количество таблиц $2\times n$, заполненных натуральными числами от 1 до $2n$, причём числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают равно c_n.

```
1 2 3    1 2 4    1 3 4    1 2 5    1 3 5
4 5 6    3 5 6    2 5 6    3 4 6    2 4 6
```

Задача 11. Докажите, что количество последовательностей натуральных чисел

$$1, a_1, \ldots, a_n, 1$$

в которых любое a_i является делителем суммы двух соседей равно c_n.

```
1 4 3 2 1    1 3 5 2 1    1 3 2 3 1    1 2 5 3 1    1 2 3 4 1
```

Задача 12. Докажите, что количество наборов из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе неважен) равно c_n.

```
0 0 0    0 1 3    0 2 2    1 1 2    2 3 3
```

Явная формула

Приведем три способа доказать явную формулу: $c_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$. Существуют и другие замечательные доказательства, например использующее метод *производящих функций*.

Задача 13 (Эйлер). а) Посчитайте двумя способами мощность множества пар «триангуляция — диагональ триангуляции».
б) Используя полученное соотношение докажите, что $(n-1)c_n = (n+2)(c_{n+1} - 2c_n)/2$
в) Докажите формулу для c_n.

Задача 14 (Принцип отражений). а) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и не опускающихся ниже оси OX равно c_n.
б) Докажите, что количество путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, состоящих из $2n$ отрезков, проходящих по диагоналям клеток и имеющих точки в нижней полуплоскости, равно количеству путей количество путей из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-2)$.
в) Найдите формулу для c_n

Задача 15. а) Докажите, что количество последовательностей $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ из $2n+1$ целых чисел, в которых $n+1$ раз встречается число 1 и n раз число -1 таких, что $a_1 > 0$, $a_1 + a_2 > 0$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} > 0$ равно c_n.
б) **(Лемма Рени)** Если $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — любая последовательность целых чисел, сумма которых равна 1, то ровно у одного из ее циклических

сдвигов

$$(x_1, x_2, \dots, x_m), (x_2, \dots, x_m, x_1), \dots (x_m, x_1, \dots, x_{m-1})$$

все частичные суммы положительные.
в) Найдите формулу для c_n

Обобщения. Принцип отражений.

Задача 16. а) Найдите количество путей c_{nk} количество путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, k) $(n \geq k)$ по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, не поднимающиеся выше прямой $y = x$ (Если записать числа c_{nk} в точки (n, k) то получится *треугольник Каталана*).
б) **(Теорема Бертрана о выборах)** Какова вероятность того, что на выборах с участием двух кандидатов, в которых первый набрал p голосов, а второй набрал $q < p$, первый будет опережать второго в течение всего времени подсчета голосов?

Задача 17. *Стандартной таблицей* диаграммы Юнга Y состоящей из n клеток называется заполнение клеток Y числами от 1 до n так чтобы они возрастали по строкам и столбцам. Например существует 5 стандартных таблиц для диаграммы с длинами строк 3 и 2:

```
1 2 3      1 2 4      1 3 4      1 2 5      1 3 5
4 5        3 5        2 5        3 4        2 4
```

а) Найдите количество стандартных таблиц для диаграммы Юнга состоящей из двух строк длины a и b $(a \geqslant b)$
б) Найдите количество стандартных таблиц для диаграммы Юнга состоящей из трех строк длины a, b и c $(a \geqslant b \geqslant c)$.

Обобщения. Лемма Рени.

Задача 18. Найдите количество путей по линиям сетки из левого нижнего угла в прямоугольника $n \times 2n$ в правый верхний не проходящих выше диагонали. Обозначим это число через a_n.

Задача 19. а) Докажите, что количество *плоских корневых строго троичных деревьев* (у каждой вершины либо три сына, либо ни одного) с $2n+1$ листьями равно a_n.
б) Докажите, что количество способов разрезать непересекающимися диагоналями $2n + 2$-угольник на четырехугольники равно a_n
в) Найдите рекуррентную формулу для a_n