Многочлены 3. Интерполяция

Упражнение. а) Постройте многочлен P первой степени такой, что $P(0) = 1$, $P(3) = 4$.
б) Постройте многочлен P второй степени такой, что $P(1) = 1$, $P(3) = 13$, $P(5) = 36$.
в) Постройте многочлен P третьей степени такой, что $P(1) = 1$, $P(3) = 4$, $P(5) = 10$, $P(7) = 27$.

Определение 1. Построение многочлена P степени не выше n, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ называется *интерполяцией.* Соответствующий многочлен P называется *интерполяционным многочленом.*

Замечание. Из задачи 14 листика Многочлены 1, следует, что интерполяционный многочлен единственный. Существование можно доказать явной конструкцией, мы приведем две: Лагранжа и Ньютона.

Задача 1. а) Постройте многочлен P который в точках $x_1, \ldots x_n$ равен нулю, а в остальных точках отличен от нуля.
б) Постройте многочлен P второй степени, который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках x_1 и x_2 равен 0.
в) Постройте многочлен P степени n который в точке x_0 принимает значение 1, а в точках $x_1, x_2 \ldots x_n$ равен нулю.
г) Постройте многочлен P степени n который в точке x_0 принимает значение y_0, а в точках $x_1, x_2 \ldots x_n$ равен нулю.
д) Постройте многочлен P степени n который в точке x_1 принимает значение y_1, а во всех точках $x_0, x_2, \ldots x_n$ равен нулю.
е) Постройте многочлен P степени *не выше* n который в точке x_0 принимает значение y_0, в точке x_1 принимает значение y_1, а в точках $x_2, \ldots x_n$ равен нулю.
ж) Постройте многочлен P степени *не выше* n такой, что $P(x_i) = y_i$, где $i = 0, 1, \ldots, n$

Определение 2. Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)}$$

называется *интерполяционным многочленом Лагранжа.*

Определение 3. Интерполяционный многочлен в виде

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

называется *интерполяционным многочленом Ньютона.*

Задача 2. Докажите, что для любых точек $x_0, x_1, \ldots x_n$ и значений $y_0, y_1, \ldots y_n$ существует интерполяционный многочлен Ньютона.

Указание: воспользуйтесь методом математической индукции.

Замечание. Достоинством интерполяционного многочлена Лагранжа является то, что он задан явной формулой. Интерполяционная форма Ньютона требует меньше вычислений, а также более удобна если точки $x_0, x_1, \ldots x_n$ появляется по одной.

Задача 3. Найдите многочлен степени не выше трех такой что
$P(0) = 1,\ P(1) = 2,\ P(2) = 4,\ P(3) = 8$
а) при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа;
б) при помощи интерполяционного многочлена Ньютона.

Задача 4. Верно ли, что любые три точки на плоскости с различными абсциссами лежат на одной параболе?

Задача 5. Найдите многочлен наименьшей степени, который при делении на $(x-1)$ дает остаток 1, при делении на $(x-2)$ дает остаток 3, при делении на $(x-4)$ остаток 5, при делении на $(x-5)$ остаток 7.

Задача 6. Многочлен называется *целозначным* если он принимает целые значения в целых точках.
а) Верно ли, что у любого целозначного многочлена все коэффициенты целые?
б) Докажите, что любой целозначный многочлен можно приставить в виде суммы многочленов $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{2},\ \ldots,\ P_n(x) = \dfrac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}, \ldots$ с целыми коэффициентами.
в) Докажите, что всякий многочлен степени n принимающий целые значения в каких-то $n+1$ последовательных целых точках является целозначным.