

Программа экзамена

Множества

1. Метод математической индукции. Большая база в индукции, обобщенная математическая индукция. Примеры задач.
2. Доказательство тождеств по индукции. Примеры: суммы первых, вторых, третьих степеней первых n натуральных чисел.
3. Множества, операции над множествами, свойства этих операций. Количество подмножеств конечного множества.
4. Отображения, виды отображений. Количество отображений между конечными множествами, количество вложений между конечными множествами.
5. Биекция между множеством подмножеств множества X и множеством отображений из X в $\{0, 1\}$.
6. Формула включений и исключений. Примеры задач.
7. Теорема о периодичности. Примеры задач.
8. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Примеры.
9. Счетные множества. Счетность множества четных, целых, рациональных чисел.
10. Континуум. Континуальность интервала, луча, прямой, полуокружности.
11. Несчетность континуума.
12. Континуальность множества точек квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, множества точек плоскости \mathbb{R}^2 .
13. Операции над множествами и мощности.

Комбинаторика

14. Перестановки. Количество способов переставить буквы слова.
15. Числа сочетаний — определение, явная формула, рекуррентная формула. Задача о количестве путей на клетчатой доске.
16. Треугольник Паскаля — рекуррентное определение, определение через количество путей, формула для элементов треугольника, формулы суммы элементов по строкам.
17. Бином Ньютона. доказательство тождеств про числа сочетаний при помощи бинома Ньютона.

Целые числа

18. Деление с остатком — определение, существование, единственность.
19. Наибольший общий делитель — определение, алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Пример нахождения линейного представления при помощи алгоритма Евклида.
20. Основная теорема арифметики.
21. Простые числа — определение, бесконечность множества простых чисел, существование сколь угодно длинных отрезков без простых чисел.
22. Сравнения по модулю, два определения, эквивалентность. Операции над сравнениями: сложение, умножение, возведение в степень.
23. Деление сравнений.
24. Малая Теорема Ферма. Доказательства через произведение остатков и бином. Пример применения МТФ.
25. Малая Теорема Ферма — комбинаторное доказательство. Пример применения МТФ.
26. Малая Теорема Ферма — доказательство через граф умножения. Пример применения МТФ.
27. Китайская теорема об остатках. Примеры задач.
28. Линейные диофантовы уравнения. Критерий разрешимости, описание всех решений.
29. Периодичность десятичной записи рационального числа. Оценка длины периода.

Математический анализ

30. Неравенства между средними.
31. Неравенство Коши с весами. Примеры задач.
32. Неравенство Бернулли.
33. Ограниченные сверху последовательности, ограниченные снизу последовательности, ограниченные последовательности. Последовательности стремящиеся к бесконечности. Примеры.
34. Любая последовательность либо ограничена либо содержит стремящуюся к бесконечности подпоследовательность.
35. ε -окрестность точки. Два определения предела последовательности, их эквивалентность, корректность.
36. Предельная точка последовательности. Существование подпоследовательности которая сходится к предельной точке.

37. Примеры последовательностей у которых нет, 1 , бесконечно много предельных точек. Пример последовательности у которой любое число является предельной точкой.

38. Бесконечно малые последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.

39. Теорема о двух милиционерах.

40. Предел многочлена при аргументе стремящемся к бесконечности.

41. Предел отношения многочлена и показательной функции.

42. Аксиомы полноты: о вложенных отрезках, ограниченной монотонной последовательности, существовании десятичной записи числа. Их эквивалентность.

43. Теорема о существовании точной верхней грани ограниченного множества.

44. Теорема о существовании предельной точки у ограниченной последовательности.

45. Теорема о корне.

46. Теорема о промежуточном значении. Существование корня у многочлена нечетной степени.

47. Непрерывная функция на отрезке ограничена и достигает своих точной верхней и нижней граней.

48. Выпуклые фигуры. Существование прямой делящей площадь пополам и параллельной данной прямой. Существование прямой делящей площадь пополам и проходящей через данную точку.

Многочлены

49. Определение многочлена. Связь между коэффициентами многочленов и значениями в некоторых точках. Примеры задач.

50. Теорема Безу. Ее следствие.

51. Оценка количества корней многочлена. Многочлен n -й степени восстанавливается по $n + 1$ точке.

52. Алгоритм Евклида. НОД двух многочленов — три определения, их равносильность.

53. Основная теорема арифметики для многочленов.

54. Кратные корни. Количество корней многочлена с учетом кратности.

55. Задача интерполяции. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

56. Задача интерполяции. Интерполяционный многочлен Ньютона.

57. Рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

58. Теорема Виета.