Программа экзамена по дополнительным листикам (Зюка)

8 класс

1. Аддитивность функции $F(M) = i + \frac{b}{2} - 1$, где i — число внутренних узлов, b — число узлов на границе.

2. Доказательство формулы Пика.

3. Сочетания с повторениями. Шары и перегородки. Явная формула для $\bar{C}_n^k$.

10 класс

4. Задача про кузнечика.

5. Одномерная теорема Кронекера.

6. Задача про двух кузнечиков.

7. Квадратичные вычеты — определение, количество.

8. Мультипликативность квадратичный вычетов.

9. Критерий когда -1 является квадратичным вычетом.

10. Бесконечность множества простых чисел вида $4k + 1$

11. Критерий Эйлера.

12. Числа Каталана — определение, рекуррентная формула, интерпретации через пути.

13. Числа Каталана — триангуляции многоугольника, открывающиеся и закрывающиеся скобки, плоские деревья.

14. Доказательство явно формулы для чисел Каталана через метод отражений.

15. Доказательство явно формулы для чисел Каталана через лемму Рени.

Программа экзамена по дополнительным листикам (Олег)

8 класс

1. Сочетания с повторениями. Шары и перегородки. Явная формула для $\bar{C}_n^k$.

10 класс

2. Задача про кузнечика.

3. Одномерная теорема Кронекера.

4. Задача про двух кузнечиков.

5. Числа Каталана — определение, рекуррентная формула, интерпретации через пути.

6. Числа Каталана — триангуляции многоугольника, открывающиеся и закрывающиеся скобки, плоские деревья.

7. Доказательство явно формулы для чисел Каталана через метод отражений.

8. Доказательство явно формулы для чисел Каталана через лемму Рени.

Программа экзамена по дополнительным листикам (Игорь)

10 класс

1. Задача про кузнечика.

2. Одномерная теорема Кронекера.

3. Квадратичные вычеты — определение, количество.

4. Мультипликативность квадратичный вычетов.

5. Критерий когда -1 является квадратичным вычетом.

6. Бесконечность множества простых чисел вида $4k + 1$

7. Критерий Эйлера.

Программа экзамена по дополнительным листикам (Юля)

1. Определение поля. Поля $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Поле остатков по модулю многочлена.

2. Количество элементов в конечном поле — степень простого числа. Поле из p^2 элементов — существование и единственность.

3. Малая теорема Ферма для конечных полей. Порядки элементов в конечных полях.

4. Целые Гауссовы числа. Определение, деление с остатком, разложение на множители.

5. Описание простых Гауссовых чисел.

6. Представление целого числа в виде суммы двух квадратов: существование, количество способов.

7. Разложение на множители в кольцах $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

8. Линейные пространства. Линейная зависимость. Базис. Размерность, корректность определения.

9. Линейные рекуррентные уравнения: пространство решений, размерность. Другой базис случай различных корней, случай кратных корней.

10. Формула n–го числа Фибоначчи. Числа Фибоначчи по модулю p: периодичность, длина периода.

11. Расширение полей, размерность расширения. Если $K \subset L \subset M$, то $\dim_K M = \dim_L M \cdot \dim_K L$.

12. Алгебраические числа. Алгебраические расширения. Всякое конечномерное расширение является алгебраическим.

13. Сумма и произведение двух алгебраических элементов есть алгебраические элементы. Вид соответствующих многочленов.

14. Если $K \subset L \subset M$ — расширение полей, L над K конечномерно и элемент $x \in M$ алгебраичен над L, то он алгебраичен над K. Число $\sqrt[3]{2}$ нельзя получить последовательностью квадратичных расширений.

15. При помощи циркуля и линейки невозможно а) удвоить куб, б) разделить произвольный угол на три равные части.

16. Определение группы. Подгруппа, порядок элемента. Смежные классы. Теорема Лагранжа. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера.

17. Прямое произведение групп. Изоморфизм между $\mathbb{Z}/ab$ и $\mathbb{Z}/a \oplus \mathbb{Z}/b$ при $(a, b) = 1$.

18. Описание группы $(\mathbb{Z}/n)^*$.

19. Действие группы на множестве и гомоморфизмы в симметрическую группу. Определение орбиты, стабилизатора. Формула Бернсайда. Количество раскрасок карусели.

20. Определитель матрицы. Определение, поведение при элементарных преобразованиях матрицы. Разложение определителя по строке.

21. Системы линейных уравнений. Критерий разрешимости. Формула Крамера.

22. $\det AB = \det A \cdot \det B$

23. Линейные отображения, линейные операторы, ядро, образ. Матрица линейного отображения. Произведение матриц.

24. Определение ранга (размерность образа, по строкам, по столбцам, через максимальный минор). Эквивалентность разных определений. Теорема Кронекера–Капелли.

25. Фактор пространство. Изоморфизм $U/\mathrm{Ker}A \cong \mathrm{Im}A$

26. К какому виду можно привести матрицу линейного отображения заменой базиса? К каком виду можно привести матрицу линейного оператора заменой базиса?

27. Группа $GL(2,\mathbb{Z})$ порождается элементами $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Группа $SL(2,\mathbb{Z})$ порождается элементами $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Доказательство формулы Пика через перекашивания.

29. Числа Каталана. Рекуррентная формула, интерпретации через скобки, через пути, через триангуляции, через плоские деревья.

30. Метод отражений. Явная формула для чисел Каталана. Треугольник Каталана. Теорема Бертрана о выборах.

31. Лемма Рени. Формула для чисел Каталана. Обобщения — пути под диагональю в прямоугольнике $n \times kn$, плоские k-арные деревья, разрезания многоугольника на $k+2$ угольники.

32. Производящие функции. Решение линейных рекуррентных уравнений методом производящих функций.

33. Бином Ньютона. Формула для чисел Каталана через производящие функции.

34. Задача про кузнечика.

35. Одномерная теорема Кронекера.

36. Задача про двух кузнечиков.

37. Двумерная теорема Кронекера.