

## Упражнения к экзамену

*Множества*

**Задача 1.** Докажите, что  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n \cdot (3n - 1) = n^2(n + 1)$

**Задача 2.** Пусть в множестве  $A$  —  $n$  элементов, а в множестве  $B \subset A$  —  $k$  элементов. Сколько существует таких множеств  $C$ , что  $B \subset C \subset A$ ?

**Задача 3.** Установите биекцию между множеством квадратов натуральных чисел делящихся на 3 и множеством нечетных чисел. Задайте эту биекцию формулой.

*Комбинаторика*

**Задача 4.** На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой — 11 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

**Задача 5.** Сколько восьмизначных чисел можно составить из 4 единиц и 4 нулей?

**Задача 6.** Каким числом способов можно расставить  $k$  ладей на доске  $n \times n$  так чтобы они не били друг друга?

*Целые числа*

**Задача 7.** Докажите, что  $5 \cdot 7^{2n} + 19$  делится на 24.

**Задача 8.** При каких натуральных  $m$  число  $3(m^2 + m) + 7$  делится на 5?

**Задача 9.** Чему может равняться НОД( $2k + 3, 11k + 7$ ) (дайте ответ в зависимости от  $k$ ).

**Задача 10.** На какое наибольшее число может быть сокращена дробь  $\frac{7a - 3}{2a - 2}$  (дайте ответ в зависимости от  $a$ )

**Задача 11.** Решите сравнение а)  $11x \equiv 4 \pmod{20}$  б)  $12x \equiv 4 \pmod{20}$   
Дайте ответ в виде  $x \equiv \dots \pmod{\dots}$

**Задача 12.** Решите в целых числах уравнение  $140x + 35 = 21y$

**Задача 13.** Решите систему сравнений 
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$$

**Задача 14.** Найдите остаток деления  $50^{961}$  на 97.

*Многочлены*

**Задача 15.** Найдите сумму коэффициентов многочлена  $(x^2 + x - 1)^5 + (x^2 - 1)^6$ .

**Задача 16.** Найдите сумму  $5^{50} \cdot C_{100}^0 + 5^{49} \cdot C_{100}^2 + 5^{48} \cdot C_{100}^4 + \dots + 5^0 \cdot C_{100}^{100}$ .

**Задача 17.** Найдите НОД многочленов  $x^4 + 2x^3 - x - 2$  и  $x^2 + 5x + 6$ .

**Задача 18.** Найдите линейное представление НОД для многочленов  $x^4 + 2x^3 - x - 2$  и  $x^2 + 5x + 6$ .

**Задача 19.** Известно, что многочлен  $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x - 1$  имеет 4 действительных корня. Найдите сумму их квадратов.

**Задача 20.** Разложите на множители многочлен  $3x^5 + 14x^4 + 25x^3 + 17x^2 - 3$

**Задача 21.** Найдите многочлен степени не выше трех такой что  $P(0) = 8, P(1) = 4, P(2) = 2, P(3) = 8$

а) при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа;

б) при помощи интерполяционного многочлена Ньютона.

*Неравенства*

**Задача 22.** Найдите наибольшее значение выражения  $\frac{3 + x^2}{x}$ .

**Задача 23.** Для неотрицательных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство  $a^6 + b^6 + c^6 \geq a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$ .

**Задача 24.** Для положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство  $\frac{a^4}{b} + \frac{b^4}{c} + \frac{c^4}{a} \geq 3abc$ .

*Математический анализ*

**Задача 25.** Найдите предел последовательности  $x_n = \frac{2n + 1 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 - n}}$ .

**Задача 26.** Найдите предел последовательности  $x_n = \frac{n^2 \cos n}{n^3 + 1}$ .

**Задача 27.** Найдите предел последовательности  $x_n = \sqrt{n + 2} - \sqrt{n}$ .

**Задача 28.** Найдите предел последовательности  $x_n = \frac{(2^n + n^2)^2}{4^n + n}$ .

**Задача 29.** Последовательность  $\{x_n\}$  строится по закону  $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ . Докажите, что  $\{x_n\}$  сходится и найдите предел.

**Задача 30.** Сколько корней имеет уравнение  $x^3 + x^2 - 3x - 1$ ? Укажите интервалы длины 1 содержащие корни.