Исследование функции с помощью произодной

Теоремы о среднем

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$:
1) непрерывна на отрезке $[a;\ b]$;
2) дифференцируема на интервале $(a;\ b)$;
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда на этом интервале найдётся точка ξ такая, что $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл: Если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

37. Покажите с помощью контрпримеров, что ни одним из трех условий теоремы Ролля нельзя пренебречь.
38. Докажите, что если все корни многочлена вещественны, то его производные всех порядков тоже имеют только вещественные корны.

    Если повернуть оси координат, то концы дуги AB уже не будут находится на одинаковом расстоянии от новой оси Ox, но касательная по прежнему будет параллельна хорде AB. Поэтому естественно ожидать, что имеет место теорема:

    На дуге AB гладкой кривой y = f(x) найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна стягивающей ее хорде AB. Сформулируем теорему аналитически:

    Теорема Лагранжа. Если функция f(x):
    1) непрерывна на отрезке $[a;\ b]$;
    2) дифференцируема на интервале $(a;\ b)$,
    то на этом интервале найдется такая точка ξ, что $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
39. Докажите, что если функция непрерывна на отрезке, а ее производная равна нулю во всех его внутренних точках, то функция постоянна на этом отрезке.
40. Докажите, что если функции $f(x)$ и $\phi(x)$ непрерывны на отрезке и имеют внутри этого отрезка одинаковые производные, то они отличаются лишь постоянным слагаемым.
41. Найдите значение ξ для функции $f(x) = x^3 - 3x + 4$ и отрезка $[1;\ 3]$.
42. Какой "результат"получится при попытке применить теорему Лагранжа к функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и отрезку $[-2;\ 1]$. Почему?
43. Докажите, что для функции $f(x) = x^2 + px + q$ и любого отрезка $[a;\ b]$ выполняется равенство $\xi = \dfrac{a+b}{2}$.
44. Докажите неравенство $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

Исследование функции на монотонность и экстремум

Признак монотонности функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке (конечном или бесконечном), а ее производная положительна (отрицательна) во всех внутренних точках этого промежутка. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на данном промежутке.

45. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на некотором промежутке. Следует ли отсюда, что ее производная положительна во всех внутренних точках этого промежутка?
46. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на некотором промежутке. Докажите, что ее производная неотрицательна во всех внутренних точках этого промежутка.
47. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке, а ее производная неотрицательна во всех внутренних точках этого промежутка. Следует ли отсюда, что $f(x)$ возрастает на данном промежутке?

    Усиленный признак монотонности функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I, а ее производная неотрицательна (неположительна) во всех внутренних точках I и равна нулю либо не существует лишь в конечном множестве точек. Тогда $f(x)$ возрастает (убывает) на I.

    Достаточное условие существования экстремума. Пусть функция непрерывна в точке x_0 и дифференцируема вблизи этой точки. Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция имеет максимум. Если же при переходе через x_0 слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке минимум.
48. Пусть $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$). Докажите, что тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный минимум (максимум)
49. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции:

    а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$; б) $y = \dfrac{16}{x(4 - x^2)}$; в) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$; г) $y = (x-1)^4(x+2)^3$;
    д) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}$; е) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$; ж) $\sqrt{2x^2 - x + 2}$.

50. Найдите точки минимума функции $y = \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}$.

51. Найдите точку максимума функции $y = 11^{6x-x^2}$

52. Найдите точку минимума функции $(0,5 - x)\cos x + \sin x$, принадлежащую промежутку $(0, \frac{\pi}{2})$.

53. Исследуйте на монотонность и экстремум функцию $y = (x+6)^2 e^{-4-x}$.

54. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2$, имеющей единственную общую точку с графиком этой функции.

Асимптоты

Определение. Прямая называется ***асимптотой*** к графику функции $y = f(x)$, если расстояние от точки графика до прямой стремится к нулю при бесконечном удалении этой точки от начала координат.

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ терпит в точке a разрыв, причем существует бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Для построения графика удобно найти отдельно пределы слева и справа и уточнить знаки бесконечностей.

Прямая $y = b$ является ***горизонтальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существует хотя бы один из конечных пределов: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют два конечных предела: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

55. Докажите последнее утверждение, разбив его на две части:
а) прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда для некоторого k существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

б) В этом случае существует и конечный предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.

Заметим, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

56. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $y = \frac{2-x^2}{1+x^4}$; б) $y = \frac{x^2+1}{x^2-6x+5}$; в) $y = (2x+1)\cdot e^{2x}$; г) $y = x\sqrt[3]{x-1}$; д) $y = \sin x + \cos^2 x$.