Исследование функции с помощью второй произодной

Выпуклость функции

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная на интервале $(a;\ b)$, называется ***выпуклой вверх*** на этом интервале, если ее график расположен не выше любой своей касательной на этом интервале.

Функция $y = f(x)$, непрерывная на интервале $(a;\ b)$, называется ***выпуклой вниз*** на этом интервале, если ее график расположен не ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение. Функция $y = f(x)$, непрерывная на интервале $(a;\ b)$, называется ***строго выпуклой вверх*** на этом интервале, если ее график расположен ниже любой своей касательной на этом интервале (за исключением лишь самой точки касания). Аналогично определяется строгая выпуклость вниз.

Достаточное условие выпуклости. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и во всех точках интервала $(a;\ b)$ $f''(x) \leqslant 0$, то функция на этом интервале выпукла вверх, если же $f''(x) \geqslant 0$ —- выпукла вниз.

Достаточное условие строгой выпуклости-1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и во всех точках интервала $(a;\ b)$ $f''(x) < 0$, то функция на этом интервале строго выпукла вверх, если же $f''(x) > 0$ —- строго выпукла вниз.

57. Покажите с помощью контрпримера, что это условие строгой выпуклости не является необходимым.

Заметим, что при доказательстве условия строгой выпуклости использовалось не само условие $f''(x) < 0$ или $f''(x) > 0$, а строгое убывание (возрастание) первой производной. Это позволяет ослабить условие так:

Достаточное условие строгой выпуклости-2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и во всех точках интервала $(a;\ b)$ $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) \geqslant 0$), причем $f''(x) = 0$ лишь в конечном числе точек, то функция на этом интервале строго выпукла вверх (вниз).

Использование термина "выпуклость"объясняет следующая

Теорема. Если функция на интервале $(a;\ b)$ выпукла вниз (вверх), то то ее график на этом интервале расположен под (над) хордой $\mathbf{AB}$, где $A(a,\ f(a))$, $B(b,\ f(b))$.

Точки перегиба

58. а) Найдите для функции $y = x^3 - 3x^2$ интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз.
    б) Сопоставьте ответы этой задачи и решенной ранее: "Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2$, имеющей единственную общую точку с графиком этой функции."

    Определение. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его часть, выпуклую вверх, от части, выпуклой вниз, называется ***точкой перегиба***.

    Необходимое условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(a;\ b)$. Тогда если точка $x_0 \in (a;\ b)$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x) = 0$.

59. Является ли это условие достаточным?

    Достаточное условие точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и дифференцируема в самой точке x_0. Если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба для графика функции $f(x)$.

60. Докажите, что если в точке перегиба есть касательная, то график функции переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую.
61. Верно ли, что если график функции переходит в точке касания с одной стороны касательной на другую, то эта точка — точка перегиба?
62. Постройте график функции $y = x^3 - 3x^2$ (для этого найдите ее нули, исследуйте на монотонность и экстремумы, а также на выпуклость и точки перегиба). Постройте касательную к графику в точке $x_0 = 1$.
63. Исследуйте функции на выпуклость и точки перегиба: а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 12}$; б) $y = \sqrt{4x^3 - 12x}$.
64. Найдите нули функции, исследуйте ее на монотонность и экстремумы, а также на выпуклость и точки перегиба. Затем постройте график.

    а) $y = (x - 2)^2(x + 2)$; б) $y = 2x^3 - x^2 + 4x$; в) $y = x^4 + 4x^3$.