

Полное исследование функции

План исследования функции

- 1) Область определения
- 2) Четность/нечетность
- 3) Периодичность (для тригонометрических функций)
- 4) Точка пересечения с осью ординат. Нули функции. Интервалы знакопостоянства
- 5) Асимптоты
- 6) Критические точки и их характер. Исследование на монотонность и экстремумы в виде таблицы.
- 7) Исследование на выпуклость и точки перегиба.

65. Проведите полное исследование и постройте график функции

а) $f(x) = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$; в) $f(x) = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

66. Проведите полное исследование и постройте график функции

а) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$; в) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+2}$; г) $f(x) = x + e^{-x}$.

67. (из варианта демо-ЕГЭ) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 8x + 7|$ больше 1.

68. Попробуйте построить график функции без исследования, комбинируя графики более простых функций. При необходимости уточните графики средствами анализа.

а) $f(x) = e^{-2x} \sin^2 x$; б) $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.

69. Проведите полное исследование и постройте график функции

а) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = e^{\cos x - \sin x}$; в) $f(x) = x^x$.

70. Постройте график функции

а) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$; б) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $f(x) = (1+x^2)e^{-x^2}$; г) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Уравнения и неравенства

71. Сколько корней может иметь уравнение $e^x = ax^2 + bx + c$?

Указание. Используйте теорему Ролля.

72. Докажите, что уравнение $x^4 + x^3 + x = 2$ имеет ровно один положительный корень.

73. Решите уравнение $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$.

74. Докажите неравенство:

а) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ при всех x ;

б) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x$ при $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$;

в) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^2}{2!}$ при всех x .