Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная

Пример 1. Координата тела меняется по закону $s(t) = 5t^2 - 2t + 1$. Найдите скорость и ускорение тела через 3 секунды.

Пример 2. На покоящееся тело массой 5 кг начинает действовать сила 10 Н. На какое расстояние переместится тело за 3 секунды?

Какой из двух примеров более естественен?

Определение. ***Первообразной*** *для данной функции* $f(x)$*, заданной на некотором промежутке, называется функция* $F(x)$*, заданная на том же промежутке, производная которой равна* $f(x)$*.*

Таким образом, $F'(x) = f(x)$. Другая запись: $dF(x) = f(x)dx$.

Процесс отыскания первообразных называется ***интегрированием*** функций.

Термин происходит от лат. "integrare"«восстанавливать», далее от "integer"«нетронутый, целый», из in- «не-, без-» + tangere «трогать, касаться».

Пример 3. Проинтегрируйте функции: а) $f(x) = 2x + 3$; б) $f(x) = \sin x$.

Основное свойство первообразной. Если $F(x)$ *— первообразная для* $f(x)$ *на некотором промежутке, то для любого числа* C *функция* $F(x) + C$ *тоже является первообразной для* $f(x)$ *на этом промежутке. Других первообразных у* $f(x)$ *на этом промежутке нет.*

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ *называют* ***неопределенным интегралом*** *этой функции и обозначают* $\int f(x)dx$*.*

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, а C пробегает множество всех действительных чисел.

$f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — переменной интегрирования, а C — постоянной интегрирования.

Формулу $\int f(x)dx = F(x) + C$ можно записать также в виде
$\int F'(x)dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C$.

Чтобы из бесконечного множества первообразных выделить одну, надо задать начальные условия.

Пример 4. Найдите первообразную $F_0(x)$ для функции $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$, принимающую значение 1 при $x = 1$.

Арифметические свойства неопределенного интеграла

1) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.
2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. Интеграл суммы равен сумме интегралов, если они существуют.
3) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx + b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx + b) + \mathrm{C}$. (Линейная замена переменной)

Таблица основных интегралов

1) $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$;
2) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
3) $\int \cos x dx = \sin x + C$;
4) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
5) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
6) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;
7) $\int e^x dx = e^x + C$;
8) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
9) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;
11) $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;
12) $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;
13) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$.

Простейшие примеры интегрирования

1) $\int (x^4 - 6x^2 + 5x - 7)dx$;
2) $\int \dfrac{(x^2 + 5x - 7)dx}{\sqrt{x}}$;
3) $\int \left(x\sqrt[3]{x} - \dfrac{6}{x^2}\right)dx$;
4) $\int (3 - x^2)^3 dx$;
5) $\int \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 dx$;
6) $\int \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$;
7) $\int \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$;
8) $\int \dfrac{x^2 dx}{1+x^2}$;
9) $\int (1 + \sin x + \cos x)dx$;
10) $\int \dfrac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$;
11) $\int (2^x + 3^x)^2 dx$;
12) $\int \dfrac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$;
13) $\int \dfrac{dx}{(x-2)^k}$, $k \neq 1$;
14) $\int \dfrac{dx}{x+2}$;
15) $\int \cos 3x dx$;
16) $\int (2x - 3)^{10} dx$;
17) $\int \sqrt[3]{1 - 3x}dx$;
18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2 - 5x}}$;
19) $\int \cos 7x \cos 4x dx$;
20) $\int \sin^2 3x dx$;
21) $\int \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 5}$;
22) $\int \dfrac{dx}{2 + 3x^2}$;
23) $\int \dfrac{dx}{2 - 3x^2}$;
24) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2 - 3x^2}}$.